3.5 ガンマ分布 $\Gamma(a,\lambda)$

$X \sim \Gamma(a,,\lambda)$ とは

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

$$E(X) = \frac{a}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{a}{\lambda^2}, \qquad M_X(\alpha) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha}\right)^a \quad (\alpha < \lambda)$$

すると

- <u>ガンマ分布の再生性</u>

$$X \sim \Gamma(a,\lambda),\ Y \sim \Gamma(b,\lambda) \text{ で独立なら } X+Y \sim \Gamma(a+b,\lambda)$$

$(\because M_{X+Y}(\alpha) = M_X(\alpha)M_Y(\alpha) = (\frac{\lambda}{\lambda-\alpha})^a(\frac{\lambda}{\lambda-\alpha})^b = (\frac{\lambda}{\lambda-\alpha})^{a+b}$

$= M_{\Gamma(a+b,\lambda)}(\alpha) \ \ (\alpha < \lambda))$

- すると $Exp(\lambda) \sim \Gamma(1,\lambda)$ より

$$X_1 \sim X_2 \sim \cdots \sim X_n \sim Exp(\lambda) \text{ で独立なら}$$
$$X_1 + X_2 \cdots + X_n \sim \Gamma(n,\lambda)$$

つまり $\Gamma(n,\lambda)$ は n 個の独立な指数分布の和.

- カイ二乗分布

$$f_{\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x \geq 0)$$

すると $X_1 \sim X_2 \sim \cdots \sim X_n \sim N(0,1)$ で独立とするとき

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2 \text{（自由度 } n \text{ のカイ二乗分布）}$$

で $\chi_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$（$\because$ ガンマ分布の再生性）

$f_{\chi_n^2}(x) = f_{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}(x) = \dfrac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \ \ (x \geq 0)$

3.6 ベータ分布 $\beta(a,b)$

$X \sim \beta(a,b)$（パラメータ a,b のベータ分布）とは

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \quad (0 < x < 1)$$

$$\left(\text{ベータ関数} = B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \ \ (a>0,\ b>0)\ \ \text{弱点克服}\boxed{35}\right)$$

$$E(X) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 xx^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{a\Gamma(a)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

$$E(X^2) = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

- ベータ分布の性質

  $X \sim \Gamma(a,\lambda),\ Y \sim \Gamma(b,\lambda)$ で独立のとき $\dfrac{X}{X+Y} \sim \beta(a,b)$（弱点克服$\boxed{54}$ (5)）

- 順序統計量との関連

  $U_1 \sim U_2 \sim \cdots \sim U_n \sim U(0,1)$ で独立とし並べ替えて

  $\min(U_1,\ldots,U_n) = U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \cdots \leq U_{(n)} = \max(U_1,\ldots,U_n)$ とすると

  $U_{(i)} \sim \beta(i, n+1-i)$

  $E(U_{(i)}) = E(\beta(i,n{+}1{-}i)) = \dfrac{i}{n+1},\ V(U_{(i)}) = V(\beta(i,n{+}1{-}i)) = \dfrac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}$