

2 AR(2) モデル

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ で独立

まず定常性を調べる.

$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$ と表されたと仮定して a_i を求める.

$$\begin{aligned} \mu + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i} &= \phi_0 + \phi_1 \left(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-1-i} \right) \\ &\quad + \phi_2 \left(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-2-i} \right) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu + a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i} &= (\phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu) \\ &\quad + \phi_1 \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} \varepsilon_{t-i} + \phi_2 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} (\phi_1 a_{i-1} + \phi_2 a_{i-2}) \varepsilon_{t-i} + a_0 \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\therefore \mu = \phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_0 \phi_1 = \phi_1$$

$$a_i = \phi_1 a_{i-1} + \phi_2 a_{i-2} \cdots \cdots (\star)$$

$$(\star) \text{ の特性方程式は } \lambda^2 = \phi_1 \lambda + \phi_2 \cdots \cdots (1)$$

この2解を α, β とすると

$$a_i = C\alpha^i + D\beta^i \quad (C, D \text{ は定数})$$

とおける. すると $Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} (C\alpha^i + D\beta^i) \varepsilon_{t-i}$ となるが, ここで $|\alpha| \geq 1$ または $|\beta| \geq 1$

なら $\sum_{i=0}^{\infty} (C\alpha^i + D\beta^i) \varepsilon_{t-i}$ は発散する. つまり

$$\sum_{i=0}^{\infty} (C\alpha^i + D\beta^i) \varepsilon_{t-i} \text{ が収束する} \Leftrightarrow |\alpha| < 1, |\beta| < 1$$

(特性方程式の解 (重解を含む) の絶対値がすべて 1 未満)

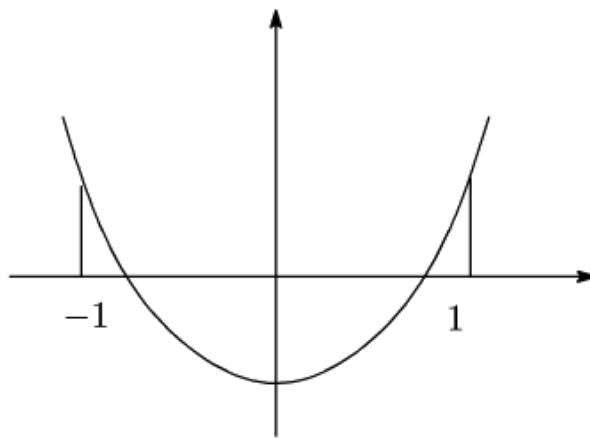
ここで二次方程式

$$f(\lambda) = \lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$$

の2解 α, β が $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ を満たす条件を探る.

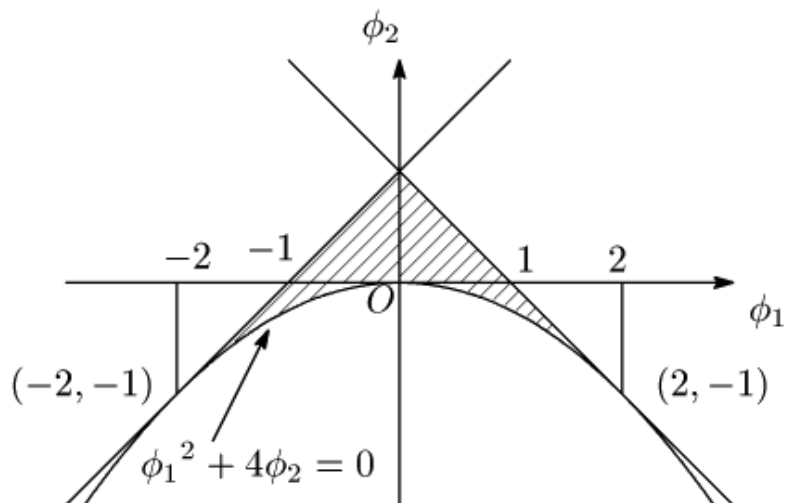
(a) $D = (-\phi_1)^2 - 4(-\phi_2) = \phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ (実解の場合)

$-1 < \alpha < 1$ かつ $f(-1) > 0$ かつ $f(1) > 0$



つまり $-1 < \frac{\phi_1}{2} < 1$ かつ $1 - \phi_1 - \phi_2 > 0$ かつ $1 + \phi_1 - \phi_2 > 0$

まずこれを図示する.



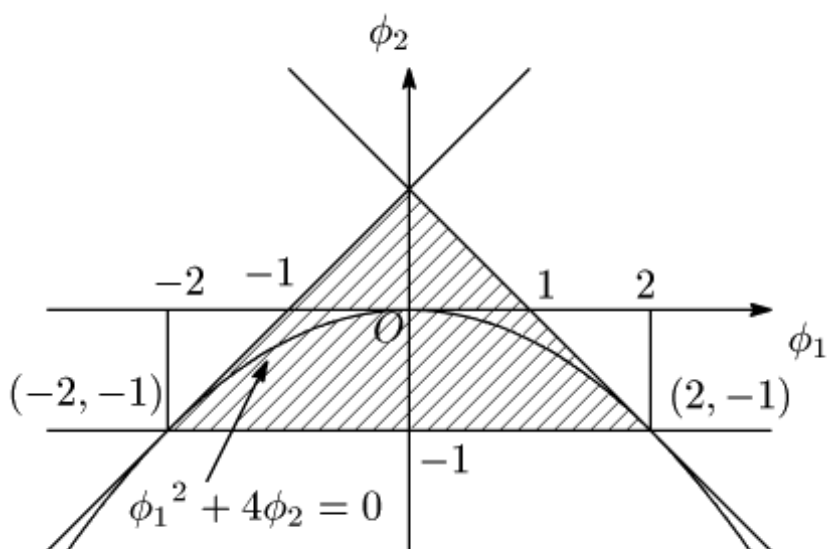
(b) $D = (-\phi_1)^2 - 4(-\phi_2) = \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ (2 虚解の場合)

すると ϕ_1, ϕ_2 は実数より $\beta = \bar{\alpha}$

つまり $|\alpha| < 1$ かつ $|\beta| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha\beta < 1$

$\Leftrightarrow -\phi_2 < 1 \Leftrightarrow \phi_2 > -1$

つまり (a), (b) 合わせて求める定常条件は下図 (境界は含まない).



定常 AR(2) モデルとユールウォーカー方程式

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ で独立

$\mu = E(Y_t) = E(\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) = \phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu$

$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$ (注意: 定常条件より $\phi_1 + \phi_2 \neq 1, \phi_1 + \phi_2 < 1$)

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad Y_t = Y_t$ として

$$\begin{aligned} \therefore \gamma_0 &= Cov(Y_t, Y_t) = Cov(\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, Y_t) \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$Y_{t-1} = Y_{t-1}$ を考えて $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \dots \dots (2)$

$Y_{t-2} = Y_{t-2}$ を考えて $\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 \dots \dots (3)$

(1) かつ (2) かつ (3) を解く.

$$(2) \text{ より } \gamma_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_0 \dots\dots\dots (4)$$

(4) を (3) に代入して

$$\gamma_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} \gamma_0 + \phi_2 \gamma_0 = \left(\frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \right) \gamma_0$$

$$\therefore (1) \text{ より } \gamma_0 = \phi_1 \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_0 + \phi_2 \left(\frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \right) \gamma_0 + \sigma^2$$

$$\therefore \left(1 - \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} - \frac{\phi_2 \phi_1^2}{1 - \phi_2} - \phi_2^2 \right) \gamma_0 = \sigma^2$$

$$\therefore \gamma_0 \left(1 - \phi_2^2 - \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2} \phi_1^2 \right) = \sigma^2$$

$$\therefore (1 + \phi_2) \gamma_0 \left(1 - \phi_2 - \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} \right) = \sigma^2$$

$$\therefore (1 + \phi_2) \gamma_0 \frac{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_2} = \sigma^2$$

$$\therefore \frac{(1 + \phi_2)(1 - \phi_2 - \phi_1)(1 - \phi_2 + \phi_1)}{1 - \phi_2} \gamma_0 = \sigma^2$$

$$\therefore \gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_2 - \phi_1)(1 - \phi_2 + \phi_1)} \quad (\text{注意：定常条件より分母} \neq 0)$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_0 = \frac{\phi_1 \sigma^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_2 - \phi_1)(1 - \phi_2 + \phi_1)}$$

$$\therefore \gamma_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)}{1 - \phi_2} \gamma_0 = \frac{(\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)) \sigma^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_2 - \phi_1)(1 - \phi_2 + \phi_1)}$$

$h \geq 2$ なら $\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \phi_2 \gamma_{h-2}$ となるので特性方程式で $\lambda^2 = \phi_1 \lambda + \phi_2$ の 2 解を α, β

として

$$\gamma_h = C\alpha^h + D\beta^h \quad (C, D \text{ は定数})$$

とおけるのでこれを初期条件 γ_0, γ_1 のもとで求めればよい.