

## 2 マルコフ性，マルコフ連鎖

### 2.1 マルコフ性

$X_t$  がマルコフ性を持つとは

$$\begin{aligned} & P(\underbrace{X_{t+1} = x_{t+1}}_{\text{未来}} \mid \underbrace{X_t = x_t}_{\text{現在}} \cap \underbrace{X_{t-1} = x_{t-1} \cap \dots \cap X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1}_{\text{過去}}) \\ & = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) \end{aligned}$$

つまり未来の条件付分布は現在だけわかれば良く現在より前の過去は必要ないという仮定をおくのである。すると

$$\begin{aligned} & P(X_{t+1} = x_{t+1} \cap X_t = x_t \cap \dots \cap X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1) \\ & = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t \cap \dots \cap X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1) P(X_t = x_t \cap \dots \cap X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1) \\ & = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) P(X_t = x_t \cap \dots \cap X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1) \\ & \vdots \\ & = \underbrace{P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)}_{\text{推移確率}} \underbrace{P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1})}_{\text{推移確率}} \cdots \underbrace{P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1)}_{\text{推移確率}} \underbrace{P(X_1 = x_1)}_{\text{初期 (確率) 分布}} \end{aligned}$$

つまり任意の  $n$  次元分布は推移確率と初期分布がわかれば比較的簡単にわかることとなる。

### 2.2 $\{1, 2\}$ 値マルコフ連鎖

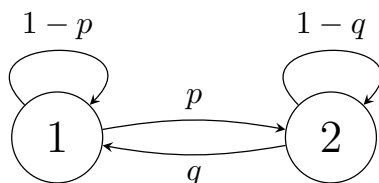
ここでは2つの値  $\{1, 2\}$  を取るマルコフ連鎖を考える（離散の値をとるマルコフ過程をマルコフ連鎖という）。

そこで

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = \textcircled{2} \mid X_t = \textcircled{1}) & = p \\ P(X_{t+1} = \textcircled{1} \mid X_t = \textcircled{1}) & = 1 - p \\ P(X_{t+1} = \textcircled{1} \mid X_t = \textcircled{2}) & = q \end{aligned}$$

$$P(X_{t+1} = \boxed{2} | X_t = \boxed{2}) = 1 - q$$

とする。これは推移図式



と考えるも良い。このとき推移確率行列  $P$  を

$$P = \begin{matrix} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \begin{pmatrix} 1-p & p \end{pmatrix} \\ \boxed{2} & \begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix} \end{matrix}$$

と定義する。すると、 $P(X_t = \boxed{1}) = p_t$ ,  $P(X_t = \boxed{2}) = q_t$  とおくとチャップマン・コルモゴ

ロフ方程式

$$\begin{pmatrix} p_{t+1} & q_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t & q_t \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} p_t & q_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

例えば

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= P(X_{t+1} = \boxed{1}) \\ &= P(X_{t+1} = \boxed{1} \cap X_t = \boxed{1}) + P(X_{t+1} = \boxed{1} \cap X_t = \boxed{2}) \\ &= P(X_{t+1} = \boxed{1} | X_t = \boxed{1})P(X_t = \boxed{1}) + P(X_{t+1} = \boxed{1} | X_t = \boxed{2})P(X_t = \boxed{2}) \\ &= (1-p)p_t + qq_t \end{aligned}$$

同様に  $q_{t+1} = pp_t + (1-q)q_t$

合わせて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{t+1} & q_{t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1-p)p_t + qq_t & pp_t + (1-q)q_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_t & q_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t & q_t \end{pmatrix} P \end{aligned}$$

となり証明が終わる.

すると、確率  $(p_t, q_t)$  は  $P$  を公比 (行列) とするベクトル値等比数列となるので、 $(p_t, q_t) = \underbrace{(p_0, q_0)}_{\text{初期分布}} P^t$  で計算できる.

しかし、行列のべき乗  $P^t$  を計算するのは少し面倒なので漸化式で求める.

$$p_{t+1} = (1-p)p_t + q(1-p_t) = (1-p-q)p_t + q$$

特解方程式は  $c = (1-p-q)c + q$  より  $c = \frac{q}{p+q}$  (= 特解 (特殊解))

$$\therefore p_{t+1} - c = (1-p-q)(p_t - c)$$

$$p_t - c = (1-p-q)^t(p_0 - c)$$

$$p_t = c + (1-p-q)^t(p_0 - c) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^t \left( p_0 - \frac{q}{p+q} \right)$$

$$q_t = 1 - p_t = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^t \left( p_0 - \frac{q}{p+q} \right)$$

と求めることができる.

すると  $p = q = 0$  か  $p = q = 1$  でない限り  $|1-p-q| < 1$  となり、極限分布  $\vec{\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} (p_t, q_t)$  は

$$\vec{\pi} = \left( \frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right)$$

と求められる.

すると  $(p_{t+1}, q_{t+1}) = (p_t, q_t)P$  の両辺の極限  $t \rightarrow \infty$  をとると

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}P = \vec{\pi} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

を満たす. 実際,

$$\begin{aligned} \vec{\pi}P &= \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q}(1-p) + \frac{p}{p+q}q & \frac{pq}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-q) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} = \vec{\pi} \end{aligned}$$

となる。

また、これはもし初期確率分布  $(p_0, q_0) = \vec{\pi}$  なら任意の  $t$  について  $(p_t, q_t) = \vec{\pi}$  となりずっと変わらない。

この意味で極限分布  $\vec{\pi}$  は不変分布もしくは定常分布とも呼ばれる。

極限分布  $\vec{\pi}$  だけを求めるなら連立方程式  $\vec{\pi} = \vec{\pi}P$  を解けば良いが、少し注意が必要で上に見た条件  $p = q = 1$  なら  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  となり

$$(p_t \quad q_t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix}, & t \text{ が偶数} \\ \begin{pmatrix} q_0 & p_0 \end{pmatrix}, & t \text{ が奇数} \end{cases}$$

となり明らかに  $\lim_{t \rightarrow \infty} (p_t, q_t)$  は存在しない。

ミキシング条件：極限確率 (定常分布)  $\vec{\pi}$  が唯一存在するための十分条件として  $P > 0$  (すべての成分が正) または  $P^2 > 0$  が知られている。これはマルコフ連鎖の状態が多くなっても成立する。

つまり  $0 < p < 1, 0 < q < 1$  なら  $P > 0$  (すべての成分が正) となるので  $\vec{\pi} = \left( \frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right)$  が唯一存在。

$p = 0$  なら

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q+(1-q)q & (1-q)^2 \end{pmatrix}$$

となりミキシング条件は満たさない。

実際,

$$(x \quad y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad x = x + qy$$

より

$$q \neq 0 \Rightarrow y = 0 \quad \therefore x = 1$$

$$q = 0 \Rightarrow y \text{ は任意} \quad \therefore (x, y) = \text{任意}$$

となり色々な場合が出てきてややこしくなる。