第１週　市場の数学基礎

第１講　収益計算の基礎

１－１）　引き算から割り算へ

収益の計算は商売の基本中の基本です。商売人は高度な数学など知らなくても儲けの計算には長けています。そこで第１講では商売の基本である収益計算について解説しましょう。100円で購入した証券Aが110円に値上がりした時点で売却すると10円の収益となります。これは単純な引き算による増分の計算です。しかしながら引き算による収益（増分）計算には大きな欠陥があります。どういうことでしょうか。

例えば証券市場では証券Aだけでなく証券Bが取引されていて、その価格が1000円だとしましょう。この証券Bが後日1050円に値上がりすれば収益は50円となります。結果として証券Aの収益は10円、証券Bのそれは50円です。この結論をもって証券Bは証券Aの5倍儲かると言えるでしょうか。答えは否です。

なぜなら証券Bの投資には証券Aの10倍の金額が必要であるのにもかかわらず収益は5倍しかないからです。このように引き算による収益計算は単位投資額あたりの投資効率を比較・測定できません。ここで登場するのが＜単位投資額あたりの収益＞つまり収益率なのです。従って収益と収益率の関係は、

$$収益率＝\frac{収益}{投資額} \qquad ・・・（１－１）$$

となります。なんでもない数式ですが抽象的な記号で表現されるとアレルギーを起こす読者も多いかと思われます。以下の数式はすべて収益率を表現したものです。
まず投資開始時点をtとして1期間後を投資終了時点$t+1$とした場合は、

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} \qquad ・・・（１－２）$$

であり、投資終了時点を投資開始時点からΔt後だとすれば、

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{P(t)} \, or \, \frac{\Delta P(t)}{P(t)} \qquad ・・・（１－３）$$

となります。これは差分による表現ですが、時間差分Δtが限りなくゼロに接近したケースでは以下のような微分によって表現されます。

$$\frac{dP(t)}{P(t)} \qquad ・・・（１－４）$$

ここで時点tにおける価格の微分$dP(t)$はいわば瞬間的な収益を意味しています。

さてここまで解説したところで読者の中には瞬間（連続）的な収益（率）のような実務には役に立ちそうもない概念がなぜ導入されるのか疑問を持たれるかもしれません。この疑問に対してはさしあたって次のように答えておきましょう。すなわち、**瞬間的なＸＸＸという連続概念を導入することによって、17世紀にニュートンやライプニッツによって開発され大成功を収めた微積分計算の適用が可能となり、収益率計算をはじめとする金融商品の評価においても他の科学技術分野と同様に工学化が可能になった**ということです。ただ、この説明だけでは微積分計算を適用することの御利益が理解できないと思われますが、この疑問はこの講座で徐々に明らかにして行きたいと考えています。

１－２）投資期間という問題　～　暗黙の了解に要注意！

投資効率の比較・測定は収益率という概念で十分でしょうか。再び100円から110円に値上がりした証券Aに登場してもらいましょう。ここで証券Aが100円から110円に上昇するのに1年間を要したとしましょう。ところがこの証券Aは投資開始から半年後にはすでに108円に上昇していたとします。単純な収益率計算では両者は比較できません。なぜなら前節の収益率計算には投資期間という概念が入ってないからです。つまり収益は投資額当りの収益率に変換するだけでなく、さらに投資期間当りの収益率（＝単位時間当たりの収益率）に変換する必要があるわけです。

ところが収益率にしても金利にしても「1年＝1期」が暗黙の前提になっている場合が多く、**単なる収益率と単位時間当たりの収益率がしばしば混同される傾向にあります**。例えば1年を1期だとすれば証券Aが1年で100円から110円に上昇した収益率は・・・

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)}=\frac{110-100}{100}\rightarrow 10\% \qquad ・・・（１－５）$$

であり半年で100円から108円になったケースは・・・

$$\frac{P(t+0.5)-P(t)}{P(t)}=\frac{108-100}{100}\to 8\% \qquad ・・・（１－６）$$

となりますが後者を単位期間（1年＝1期）当りの収益率に一致させるには8%を2倍する必要があります（いわゆる年率換算という操作です）。つまり単位期間当りの収益率をrとしますと、

$$\frac{P(t+0.5)-P(t)}{P(t)}=r\times 0.5\to\frac{P(t+0.5)-P(t)}{P(t)\times 0.5}=r \qquad ・・・（１－７）$$

この考え方を前者のケースにも適用すると・・・・

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)}=r\times 1\to\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)\times 1}=r \qquad ・・・（１－８）$$

となります、この場合は単位期間と投資期間が一致しているので両者の比率が1となり数式上には現れません。これが単なる収益率と単位時間当たりの収益率が混同される理由です。以上の考察結果を差分表現すれば・・・

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{P(t)\cdot\Delta t}\to\frac{\Delta P(t)}{P(t)\cdot\Delta t} \qquad ・・・（１－９）$$

であり、微分表現では・・・

$$\frac{dP(t)}{P(t)dt} \qquad ・・・（１－１０）$$

となります。

以上の解説は当たり前といえば当たり前なのですが、抽象的に表現されると意外と見落とされがちです。私の経験では、「3ヶ月預金金利が8%の場合、100億円の3ヵ月後の元利合計はいくら？」との質問に108億円と答える人がかなりの割合で存在するのです。オーバーナイトや1ヶ月あるいは5年であろうが**期間にかかわりなく「金利という場合は年率＝一期**

が基本」という暗黙の了解が案外忘れられるケースが多いということです。実務ではこのような単純なミスのほうが致命傷となるのです。

１－３）金利計算との関係

　貨幣の収益率が金利です。つまり投資開始時期の証券価格を貨幣の元本、投資終了時の証券価格を貨幣の元利合計と考えればいいわけです。差分モードで表現しますと・・・

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{P(t)\cdot\Delta t}=r$$
$$P(t+\Delta t)=P(t)+P(t)\cdot\Delta t\cdot r \qquad \cdot\cdot\cdot(1-11)$$
$$P(t+\Delta t)=P(t)[1+\Delta t\cdot r]$$

と変形できますが、これでは抽象的ですので下のように書き換えてみましょう。

$$\text{元利合計}=\text{元本}\times(1+\text{運用調達期間}\times\text{金利}) \qquad \cdot\cdot\cdot(1-12)$$

何のことはない単純な単利計算です。くどいようですが金利計算も「1期=1年」が基準ですから運用・調達期間が例えば184日の場合は、

$$\frac{184}{365} \qquad \cdot\cdot\cdot(1-13)$$

を金利にかけて按分（ Interpolation ）します。例えば100億円を184日間５%で運用した場合の元利合計は、

$$10000000000\times\left(1+\frac{184}{365}\times 5\%\right)=102520547945 \qquad \cdot\cdot\cdot(1-14)$$

となります。ただし国際金融の実務では分母が360日とする慣習（ユーロ・マネー・マーケット・ベイシスと呼ばれています）をはじめとして様々な金利計算方式がありますので注意が必要です。また金利表示は年率ですが複利計算の最小期間を半年にするか1年にするかでは計算結果は異なってきます。

１－４）収益率と対数収益率の関係

さて価格分析やオプション・プライシングなどのアセット・プライシングにおいて頻繁に登場する概念の代表が対数収益率です。単なる収益率と対数収益率とどこが違うのでしょうか。理解のプロセスをはしょって公式暗記的な表現をすれば、**対数収益率は連続複利ベースで測定される収益率であって通常の収益率は単利ベース**であるということです。そこに本質的な差異は存在しませんが、同じ5%でも単利と複利では具体的な数値にズレが存在することだけ注意してください。連続複利や指数・対数の概念（巻末【**数学付録】第Ａ講　指数と対数**参照）は理論面だけでなく金融実務においても極めて重要な役割を果たしていますので後で改めて詳細な解説をしますが、今回はさしあたって単利ベースと連続複利ベースでは1円あたりの1期間後の元利合計にどのくらいズレが発生するかを示すことにします。次はスプレッド・シート での計算例です。

Microsoft Excel - Excel市場数学（１）課題.xlsx

G15　=EXP(G13)

	A	B	C	D	E	F	G
13	1円を投資した場合の元利合計		5.0%	10.0%	20.0%	50.0%	100.0%
14	収益率	1+r	1.05000	1.10000	1.20000	1.50000	2.00000
15	対数収益率	exp(r)	1.05127	1.10517	1.22140	1.64872	2.71828

第1週課題 / 対数収益 / 標準偏差 / 存在確率 / ヒス

単利ベースでは収益率に1円（元本）をプラスし、連続利子率ではスプレッド・シート関数、＝EXP()に収益率を代入しています。収益率が大きくなるに従って元利合計のズレも増大しているのがわかります。注目すべきは収益率が100%のケースです（コラムG)。単利ベースの場合は1円の投資に対して1円の収益（利息）ですから元利合計は2円となるのは簡単に理解できますが、連続利子率ベースで運用した場合、元利合計は2.71828円になります。実を言うとこの数値（2.71828…）は複利効果を極限まで発揮した場合の最大値を示していて数学的には自然対数の底（ネピアの数）e［＝2.71828…］の値になります。また、底がeである自然対数$\log_e\cdot$は底eを省略して$\log\cdot$あるいは$\ln\cdot$で略記し、対数変換のスプレッド・シート関数はLN（　）です。

最後に数式で敷衍してみましょう。まず1期間の（単利）収益率は、

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)}=r \qquad ・・・（１－１５）$$

ですから変形すれば、

$$P(t+1)=P(t)[1+r] \qquad ・・・（１－１６）$$

となりました。一方、対数収益率［＝証券価格比の対数値］は、

$$\log\left(\frac{P(t+1)}{P(t)}\right)=r \qquad ・・・（１－１７）$$

と定義されますので指数・対数の関係から、

$$\frac{P(t+1)}{P(t)}=e^{r}\left(=\exp(r)\right) \qquad ・・・（１－１８）$$

と変形でき結局、

$$P(t+1)=P(t)\cdot e^{r} \qquad ・・・（１－１９）$$

となります。つまり**単利収益率で測るか連続収益率で測るかは1＋rを利用するかexp(r)を利用するかの違い**なのです。さらに具体例を挙げてみましょう。現在100円の証券価格が105円に上昇すれば簡単に暗算できるように収益率は５%ですが、これを対数価格で考えてみることにします。対数変換のスプレッド･シート関数＝LN(　)に100円と105円を代入すれば、4.65396と4.60517ですが後者から前者を引けば、0.04879となり連続利子率ベースの収益率4.879%が求まります。これは単利5%に対応する連続的な収益率です。この計算過程は、

$$\begin{aligned}&\log\left(\frac{P(t+1)}{P(t)}\right)=r \\ &\log P(t+1)-\log P(t)=r\end{aligned} \qquad ・・・（１－２０）$$

に他なりませんが、**指数・対数のメリットの1つはこのように割り算（証券価格比）が引き算（証券価格の対数値の差）に変換できること**です。

　ところで収益率に関して言えば、オプション・プライシングなどのアセット・プライシングを理解する上で注意しなければならない事があります。周知のようにアセット・プライシングでは**対数収益率が正規分布すると仮定**されています。ここで誤解しやすいのは対数

収益率が正規分布なのだから、収益率は対数正規分布するのではないかという思い込みです。これは間違いです。**対数正規分布をするのは＜価格比＞であって収益率ではありません。**価格比は価格変動率と呼ばれることもありますが収益率と混同しないようにしてください。（巻末【数学付録】第Ｂ講　正規分布、標準正規分布、対数正規分布参照）

簡単に整理しますと、**確率変数*X*の対数値log *X*が正規分布に従うとき、*X*自身は対数正規分布に従います。**ここでオプション・プライシングの場合は、

$$\log X = \log\left(\frac{P(t+1)}{P(t)}\right) \qquad \cdots(1-21)$$

ですから、

$$X = \frac{P(t+1)}{P(t)} \qquad \cdots(1-22)$$

ということになります。これが価格比です。マクロ金融経済では、直感的にわかりやすくする為に、大雑把に価格比を収益率とみなして政策を論じることがありますが、具体的計算段階では区別が必要です。価格比を収益率と比較してみますと、

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} = \frac{P(t+1)}{P(t)} - 1 = r \qquad \cdots(1-23)$$

ですから。収益率は1円当りの成長率ですから価格比から1を引いたものになります。逆に価格比とは元本を包括した1＋r（1円あたりの元利合計）のことなのです。