【第 4 章】

ブラック＝ショールズモデルとその応用

第 2 章・第 3 章と、2 項モデルを使用したオプション評価について見てきましたが、本章ではオプション評価の代表的なモデルであるブラック＝ショールズモデルとその拡張版について見ていきましょう。まずはブラック＝ショールズ式の確認です。

1. ブラック＝ショールズ式の確認

＜ブラック＝ショールズ式＞

コール・プレミアム

$$C = S \times N(d_1) - e^{-r\tau} \times K \times N(d_2)$$

プット・プレミアム

$$P = S \times \{N(d_1) - 1\} - e^{-r\tau} \times K \times \{N(d_2) - 1\}$$

ただし

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

■ 記号

S ：現在の原資産価格

K ：権利行使価格

タウ
τ ：オプション満期までの期間（年）

σ ：ボラティリティ（%）

r ：安全利子率／リスクフリーレート（%）[※13]

■ 数学記号（以下の記号の意味については第 5 章を参照して下さい）

N( )：標準正規分布の累積分布関数

ln( )：自然対数

e ：自然対数の底（＝2.7182…）

なお、ブラック＝ショールズモデルでは次のような条件をおいて上式の導出を行っています。

※13 連続複利ベースでの値を入力します。連続複利については第 5 章を参照して下さい。ちなみに、ブラック＝ショールズ式の原論文ではリスクレスレートと称していますが、本講座では、より一般的な呼称のリスクフリーレートを使います。

ブラック＝ショールズモデルの条件

- ☑ オプションは満期時のみ権利行使可能なヨーロピアン・タイプとする
- ☑ 原資産は原資産価格が対数正規分布※14に従う現物とする
- ☑ オプション満期までに原資産からキャッシュフロー（配当等）は発生しない
- ☑ 原資産のボラティリティは満期まで一定である
- ☑ 安全利子率は満期まで一定である
- ☑ マーケットは摩擦のない市場である（取引コスト無し、空売り可能等）

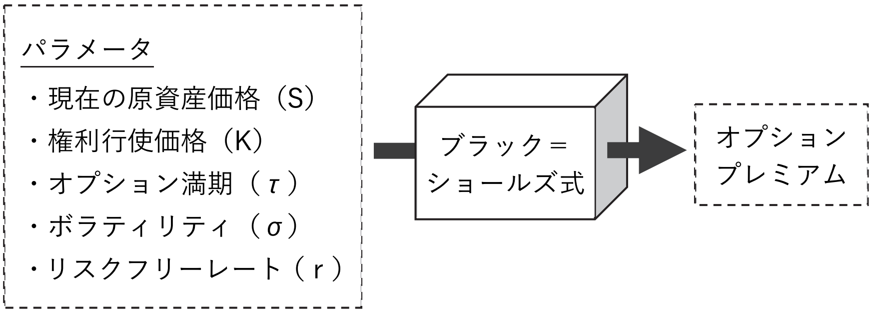
従って、オリジナルのブラック＝ショールズ式は配当の無い原資産を対象としたヨーロピアン・オプションの評価式だということになります。本章ではオリジナルのブラック＝ショールズ式の考察から始めて、通貨オプションや先物オプション等を評価する際に使用する拡張版のブラック＝ショールズ式の紹介まで行います。

まずは、ブラック＝ショールズ式そのものの使い方から見ていくことにしましょう。

※14 対数正規分布については第５章を参照して下さい。

2. ブラック＝ショールズ式によるプレミアム算出

本章の冒頭でも紹介したように、現在の原資産価格(S)、権利行使価格(K)、オプション満期（τ)、ボラティリティ（σ)、リスクフリーレート（r）をブラック＝ショールズ式に入力すればオプションのプレミアムが算出できます。



とは言え、N(d)の計算等が出てくるので手計算では無理です。よってここではエクセルを使ってブラック＝ショールズ式を計算するシートを作成することにします。

Excel ファイル “Option2_1st.xlsx” シート 1-2

＜エクセルを使ったブラック＝ショールズ式の計算＞

コール・オプションの計算式から作成しますが、式が複雑なので一つのセル内で計算式を作成するのは得策ではありません。そこで、いくつか段階を踏みながら進めましょう（完成したシートは 63 ページに掲載してあります）。

まずは入力項目の確認です。ブラック＝ショールズ式に入力すべき項目は、「S：現在の原資産価格」、「K：権利行使価格」、「τ：オプション満期までの期間（年)」、「σ：ボラティリティ（%)」、「r：安全利子率／リスクフリーレート（%)」でした。ここではS＝1,000 円、K＝1,100 円、τ＝0.5（半年)、σ＝0.25（25%)、r＝0.01（1%）として、セル B1～B5 に各値を入力してみましょう。

	A	B
1	S	1000
2	K	1100
3	τ	0.5
4	σ	0.25
5	r	0.01

次は補助計算を行います。ここでもう一度コール・オプションの式を確認しておくと次の通りです。

$$C = S \times N(d_1) - e^{-r\tau} \times K \times N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

まずは d_1 から求めてみましょう。

$\ln\left(\frac{S}{K}\right)$ は関数「=LN()」を、$\sqrt{\tau}$ は関数「=SQRT()」を使えば計算できるので、d_1 の前半部分 $\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ のうち、分子 $\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r\tau$ の計算式は「LN(B1/B2)+B5*B3」となり、分母 $\sigma\sqrt{\tau}$ の計算式は「B4*SQRT(B3)」となるので、d_1 の計算式は「=(LN(B1/B2)+B5*B3)/(B4*SQRT(B3))+B4*SQRT(B3)/2」となります（セル B7 に入力）。前半の「/」以下が単に「B4*SQRT(B3)」ではなく「(B4*SQRT(B3))」となることに注意しましょう。

	A	B
7	d1	-0.42248

d_2 は $d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ となるので、セル B8 に「=B7-B4*SQRT(B3)」と入力します。

	A	B
8	d2	-0.59926

次はディスカウント・ファクター $e^{-r\tau}$ の計算です。これは関数「=EXP()」を使えばよいので、セル B9 に「=EXP(-B5*B3)」と入力します。

	A	B
9	DF	0.995012

あとは累積分布関数 N(d_1)、N(d_2)を計算すれば準備は終わりです。N(d)の計算は関数「=NORMSDIST()」が使えたので、セル B10、B11 にそれぞれ「=NORMSDIST(B7)」、「=NORMSDIST(B8)」と入力します。

（Excel2010 以降では NORM.S.DIST(B7, TRUE) としても同じ結果が得られます。）

	A	B
10	N(d1)	0.336336
11	N(d2)	0.2745

そして最後にブラック=ショールズ式の作成です。

コール・オプションの式は「$S \times N(d_1) - e^{-r\tau} \times K \times N(d_2)$」であったので、セル B13 に「=B1*B10-B9*B2*B11」と入力すれば完成です。

	A	B
13	Call	35.89239

次はプット・オプションです。

計算式は「$S \times \{N(d_1) - 1\} - e^{-r\tau} \times K \times \{N(d_2) - 1\}$」であったので、セル B14 に「=B1*(B10-1)-B9*B2*(B11-1)」と入力して下さい。

	A	B
14	Put	130.4061

以下、完成したシートです（C 列に、B 列に入力した数式を表示しています[※15]）。

※15 ここでも NORM.S.DIST (B7, TRUE)などの関数と同じです。

	A	B	C
1	S	1000	
2	K	1100	
3	τ	0.5	
4	σ	0.25	
5	r	0.01	
6			
7	d1	-0.42248	=(LN(B1/B2)+B5*B3)/(B4*SQRT(B3))+B4*SQRT(B3)/2
8	d2	-0.59926	=B7-B4*SQRT(B3)
9	DF	0.995012	=EXP(-B5*B3)
10	N(d1)	0.336336	=NORMSDIST(B7)
11	N(d2)	0.2745	=NORMSDIST(B8)
12			
13	Call	35.89239	=B1*B10-B9*B2*B11
14	Put	130.4061	=B1*(B10-1)-B9*B2*(B11-1)

原資産価格 1,000 円、権利行使価格 1,100 円なので、コール・オプションよりもプット・オプションの方がプレミアムが高くなっていますね。ここで原資産価格 S を 1,200 円とすると、コールとプットのプレミアムの大小関係が逆転します。

	A	B
1	S	1200
2	K	1100
13	Call	144.2144
14	Put	38.72808

原資産価格を 1,000 円に戻して、今度はボラティリティを変えてみましょう。もともと 0.25（25%）でしたが、それを 0.4（40%）にしてみます。

	A	B
1	S	1000
2	K	1100
3	τ	0.5
4	σ	0.25
13	Call	35.89239
14	Put	130.4061

	A	B
1	S	1000
2	K	1100
3	τ	0.5
4	σ	0.4
13	Call	76.42927
14	Put	170.943

コール／プットに関わらず、ボラティリティとプレミアムの変化額はほぼ正比例の関係になるので共にプレミアムが上昇しています。

ここで、2 項モデルとボラティリティとの関係について触れておきましょう。今ブラック＝ショール式で確認したように、オプションのプレミアムはボラティリティに影響を受けて変化します。では、2 項モデルとボラティリティはどのように関わってくるのでしょうか？

思い出してください。2 項モデルを学習した時は、設定条件の中にボラティリティという言葉はありませんでしたが、その代わりに将来の原資産価格の変動の激しさを表すものとして上昇／下落時の倍率が「上昇時 1.25 倍／下落時 0.8 倍」とか「上昇時 1.6 倍／下落時 0.625 倍」として与えられていました。後者の組み合わせの方が原資産価格の変動は激しくなりますが、これはボラティリティの言葉で言うと「ボラティリティが高い」という状態にあたります。

実は、この上昇／下落の倍率 u／d はボラティリティ σ とツリーの 1 期間の長さ Δt を用いて次のように表せるのです[※16]。

＜2 項モデルでの上昇／下落の倍率＞

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

例えば、ボラティリティ＝20%、Δt＝0.5（年）であれば、$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.2\times\sqrt{0.5}} \fallingdotseq 1.152$、$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0.2\times\sqrt{0.5}} \fallingdotseq 0.868$ となります。この計算はエクセルで簡単にできます。例えば u の計算であれば、セルに「=EXP(0.2*SQRT(0.5))」と入力してみて下さい。

※16 これが唯一の表し方ではありませんが、こうすると ud＝1、すなわち udS＝duS＝S となる性質を持つことになり、実務上良く使われている表し方としてここでは紹介します。なぜこのような式になるかについては、本コースの範囲を超える議論が必要となるので説明の対象外とします。そうなる理由が知りたい方は金融工学の専門書をご覧下さい。また、弊社の専門科（Σ1 級レベル）「金融工学コース」もしくは「オプションコース」でも詳しい解説を行っているので、より深く勉強したい方は弊社専門科も併せてご利用下さい。

ちなみに、Δt=0.5 を固定してボラティリティの数字を変化させると u、d の計算結果は次のようになり、ボラティリティが高いほうが上昇／下落の倍率が激しくなる（u は大きくなり、d は小さくなる）ことが分かりますね。

ボラティリティと倍率

σ	u	d
10%	1.07327	0.93173
15%	1.11190	0.89937
20%	1.15191	0.86812
25%	1.19336	0.83797
30%	1.23631	0.80886
35%	1.28080	0.78076
40%	1.32690	0.75364

例えば、第 3 章で作成したプライシングシート（行使価格を 800 円にした状態）で u を 1.25→1.6、d を 0.8→0.625 として計算しなおしてみると（ボラティリティを高くすることに相当しますね）、次のようになります。

	A	B	C	D	E	F	G
1	u	1.6		株価推移			
2	d	0.625		現在	1 年後	満期時	OP価値
3	R	1.05				1792	992
4					1120		
5	p	0.435897		700		700	0
6	1−p	0.564103			437.5		
7						273.4375	0
8	株価	700					
9	行使価格	800		推移確率			
10				現在	1 年後	満期時	
11	満期時OP	188.4865				0.190007	
12	プレミアム	170.9628			0.435897		
13				start		0.491782	
14					0.564103		
15						0.318212	

変更前と比べると、株価ツリーの広がり具合が大きくなり、プレミアムも高くなっていることが分かります（82.23454→170.9628）。

ちなみに、先の u、d の式を元に上昇／下落の倍率を決定するかたちで 30 期間モデルを作成して、ブラック＝ショールズ式で評価したコール・オプションを評価してみるとプレミアムは 36.368 となり、ブラック＝ショールズ式で求めた値（35.892）とそれなりに近い値となります。

Excel ファイル “Binomial30.xlsx”

＜30 期間モデルでの評価＞

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	AD	AE	AF	AG	AH	AI
1	S	1000		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	26	27	28	29	30	満期時OP
2	K	1100																							2633	1533.32113
3	τ	0.5																						2550		
4	σ	0.25																					2469		2469	1368.71091
5	r	0.01																				2390		2390		
6																					2314		2314		2314	1214.39055
7	Δt	0.016667																				2241		2241		
8	u	1.032801																			2170		2170		2170	1069.71684
9	d	0.96824																				2101		2101		
10	R	1.000167																			2034		2034		2034	934.08675
11																						1969		1969		
12	p	0.494514																			1907		1907		1907	806.934968
13	1-p	0.505486																				1846		1846		
14																					1788		1788		1788	687.731508
15	満期時OP	36.55038																				1731		1731		
16	プレミアム	36.36808																		1676	1676		1676		1676	575.979515
17																			1623			1623		1623		
18																		1571		1571	1571		1571		1571	471.213196
19																	1521		1521			1521		1521		
20																1473		1473		1473	1473		1473		1473	372.995871
21															1426		1426		1426			1426		1426		
22														1381		1381		1381		1381	1381		1381		1381	280.918161
23													1337		1337		1337		1337			1337		1337		
24												1295		1295		1295		1295		1295	1295		1295		1295	194.596275
25											1253		1253		1253		1253		1253			1253		1253		
26										1214		1214		1214		1214		1214		1214	1214		1214		1214	113.670413
27									1175		1175		1175		1175		1175		1175			1175		1175		
28								1138		1138		1138		1138		1138		1138		1138	1138		1138		1138	37.8032672
29							1102		1102		1102		1102		1102		1102		1102			1102		1102		
30						1067		1067		1067		1067		1067		1067		1067		1067	1067		1067		1067	0
31					1033		1033		1033		1033		1033		1033		1033		1033			1033		1033		
32				1000		1000		1000		1000		1000		1000		1000		1000		1000	1000		1000		1000	0
33					968		968		968		968		968		968		968		968			968		968		
34						937		937		937		937		937		937		937		937	937		937		937	0
35							908		908		908		908		908		908		908			908		908		
36								879		879		879		879		879		879		879	879		879		879	0
37									851		851		851		851		851		851			851		851		
38										824		824		824		824		824		824	824		824		824	0
39											798		798		798		798		798			798		798		
40												772		772		772		772		772	772		772		772	0
41													748		748		748		748			748		748		

【確認問題 5】

次の条件でヨーロピアン・オプションのプレミアムを求めよ。

① コール・オプション（S＝700、K＝750、τ＝1、σ＝20%、r＝0.9%）

② プット・オプション（S＝800、K＝950、τ＝0.5、σ＝25%、r＝0.7%）

3. ブラック=ショールズ式の導出（概要）

かなり発展的な内容となりますが、ブラックショールズ式の導出についてその概要を紹介しておきます。難解な数式に惑わされず、導出の大まかな流れを理解するよう心がけて下さい。

(1) ブラック=ショールズモデルにおける前提

ブラック＝ショールズモデルでは、原資産価格の推移が次の式に従うと仮定しています。

$$\Delta S(t) = S(t)\mu\Delta t + S(t)\sigma\Delta W$$

または

$$\Delta \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\Delta W$$

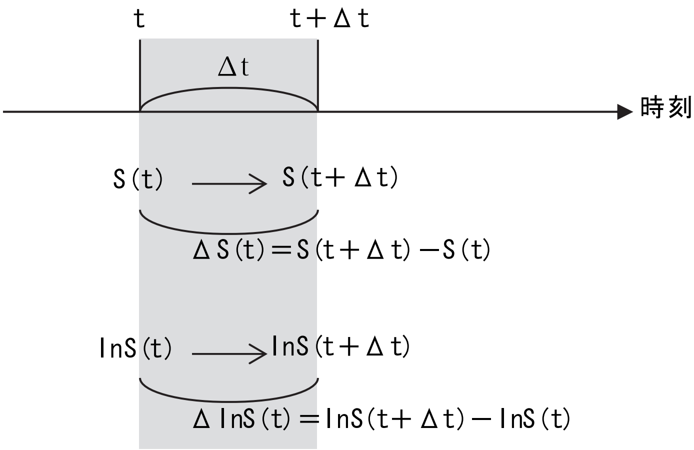
ただし、

S (t)：時刻 t における原資産価格
μ ：ログ・リターン※17の期待値（年率）
σ ：ボラティリティ（%）

lnS(t) は S(t)の対数値を表します。また、Δt は微小な時間の変化幅※18を表し、ΔlnS(t) や ΔS(t) は Δt の間における lnS(t) や S(t) の変化幅を表します。よって先の二つの式は「Δt という短い時間の間に lnS(t) や S(t) がどれだけ変化するか」を定式化したものだと分かります。

※17 ログ・リターンについては第 5 章を参照して下さい。
※18 本来ブラック＝ショールズモデルはΔt⇒0 となる世界（記号では dt と表現）を考えていますが、dt という世界では説明が分かりにくくなる（イメージしにくい）ので、ここでは有限な時間幅を持った Δt で説明します。

図表 1- 40　ΔS(t)、ΔlnS(t)のイメージ



S(t) と lnS(t) のどちらに着目するかで見た目は少し違いますが、本質的には同じ式ですので株価の変化を表す ΔS(t) の式について見ていきましょう。ΔS(t) の式は Δt の項と ΔW の項に分けられますが、Δt は短い時間の変化を表すので、Δt の項は Δt という短い時間の間に必ず増える（もしくは減る）値になります。一方、ΔW は Δt という短い時間の間の確率的な変動を表します[※19]。よって Δt の間の株価の変化 ΔS(t) は確実に変化する部分（Δt の項）とランダムに（確率的に）変化する部分（ΔW の項）の組み合わせで表現されていることが分かります。

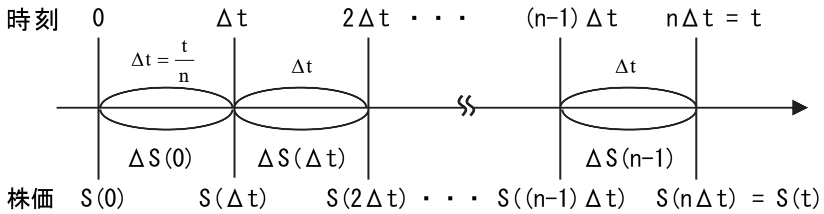
$$\Delta S(t) = \underbrace{\boxed{S(t)\mu\Delta t}}_{\text{確実に変化する部分}} + \underbrace{\boxed{S(t)\sigma\Delta W}}_{\text{ランダムに変化する部分}}$$

※19 W＝W(t) はウィナー・プロセスと呼ばれ、期待値ゼロ、分散 t の正規分布に従う確率変数であり、その W(t)の Δt 間における変位（W(t＋Δt)－W(t)）が ΔW です。ΔW は期待値ゼロ、分散 Δt の正規分布に従います。詳しくは金融工学の専門書をご覧下さい。

そしてΔt の項、ΔW の項共に S(t) が乗じてあるので、その時点における原資産価格の水準により、変化の幅 ΔS(t) が影響を受けることが分かります。

次の図は、満期（t 年）までを n 等分した時の株価 S の変化の様子です。

図表 1- 41　株価 S の変化の様子



S(0) に ΔS(0) を足すと次の時点の株価 S(Δt) となり、S(Δt) に ΔS(Δt) を足すと次の時点の株価 S(2Δt) となります（以降同様)。数式で表すと次の通りです。

$$S(\Delta t) = S(0) + \Delta S(0)$$
$$S(2\Delta t) = S(\Delta t) + \Delta S(\Delta t) = S(0) + \Delta S(0) + \Delta S(\Delta t)$$
$$\vdots$$
$$S(n\Delta t) = S\big((n-1)\Delta t\big) + \Delta S\big((n-1)\Delta t\big) = S(0) + \Delta S(0) + \Delta S(\Delta t) + \cdots + \Delta S\big((n-1)\Delta t\big)$$

各時点における変化幅ΔS は確率的に値が決まるので、それを合計した満期時点での株価 S(t) も確率的に値が決まることになります。また、満期時点での株価 S(t) の対数値 lnS(t) も S(t) と同様に確率的に値が決まります。

S(t)、lnS(t) が従う具体的な確率分布は次の通りです。

・$S(t)$ ・・・ 期待値 $S(0) \times e^{\mu t}$ の対数正規分布

・$\ln S(t)$ ・・ 期待値 $\ln S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$、分散 $\sigma^2 t$（標準偏差：$\sigma\sqrt{t}$）の正規分布

以上は現実の世界での話でしたが、オプションプライシングはリスク中立な世界で行えばよいので、リスク中立な世界における S(t) の期待値について考

えてみましょう（後ほど必要になります）。リスク中立な世界では、満期時の原資産価格の期待値は S(0) 円を安全資産で運用した結果（RS(0)）と等しくなります。BS モデルにおいても同様のことが言えるので、S(t) の期待値 E*[S(t)][※20] は $S(0)\times e^{rt}$ となります。

(2) ブラック＝ショールズ式の導出

ではいよいよ、ブラック＝ショールズ式を導出してみましょう。2 項モデルの時と同様にオプションのプレミアムは「リスク中立な世界でのオプション満期時におけるオプション価値の期待値」を現在価値に割り引いたものとして求めれば OK です。以下、権利行使価格が K であるようなヨーロピアン・コール・オプションのプレミアム計算式（ブラック＝ショールズ式）を導出していきます。

満期時点 t における原資産価格 S_t（以下簡便の為、S(t)を S_t と表記することにします）と権利行使価格 K を使って、満期時のコール・オプションの価値は Max[S_t－K,0] と表せました。よって、リスク中立な世界における満期時のオプション価値の期待値は Max[S_t－K,0] の期待値を求めれば良いので、リスク中立な世界において S_t が従う確率密度関数を f(S_t) とすると、

$$\text{オプション価値の期待値} = \int_0^\infty \max[S_t - K, 0]\times f(S_t)dS_t$$

となります。

なんだか計算が大変そうな式が出てきましたが、これを計算する際に次のような期待値計算の公式が使えます。

確率変数 X が対数正規分布に従い、lnX の標準偏差が σ である時、

$$E[\max(X-K,0)] = E(X)N(d_1) - KN(d_2) \qquad \text{（K は定数）}$$

ただし、

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{E(X)}{K}\right] + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}, \quad d_2 = d_1 - \sigma$$

※20 E*[]はリスク中立な世界での期待値を表しています。

X が対数正規分布に従うとしているので、lnX は正規分布に従うこととなります。また、N( ) は標準正規分布の累積分布関数です。

先の公式を今考えているケースにあてはめて考えると、
確率変数「S_t」が対数正規分布に従い、「$\ln S_t$」の標準偏差が「$\sigma\sqrt{t}$」
である時、

$$E^*[\max(S_t - K, 0)] = E^*(S_t)N(d_1) - KN(d_2)$$

が成り立ちます。
先ほど確認したように、$E^*[S_t] = S_0 \times e^{rt}$ であったので、

$$E^*[\max(S_t - K, 0)] = S_0 \times e^{rt}N(d_1) - KN(d_2)$$

となります。あとは上式にディスカウント・ファクター e^{-rt} を乗じて現在価値に割り引けば良いので、

$$\text{プレミアム} = S_0 \times N(d_1) - K \times e^{-rt} \times N(d_2)$$

となります。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S_0 \times e^{rt}}{K}\right] + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \ln e^{rt}}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + rt}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

ここで、現在の原資産価格 S_0 を S、オプション満期までの期間 t を τ と表すと、今得られた結果は次のように整理できます。

$$\text{プレミアム} = S \times N(d_1) - K \times e^{-r\tau} \times N(d_2)$$

ただし、

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

この章の冒頭で紹介したブラック＝ショールズ式（コール）と見事一致しましたね。

お疲れ様でした。途中難しい数式もいくつか出てきましたがそれに惑わされることなく、リスク中立評価法でのブラック＝ショールズ式導出の流れをご確認頂けたでしょうか。シグマ２級レベルでは大まかな流れがつかめれば十分ですので、良く分からなかった方は繰り返しテキストを読み返してみて下さい。

4. 修正ブラック＝ショールズモデル

オリジナルのブラック＝ショールズモデルでは原資産に対して色々な制約がありましたが、「オプション満期までに原資産からキャッシュフローは発生しない」、すなわち配当が無いという制約は困りものです。もし原資産が配当の無い株式であれば問題ありませんが、例えば通貨（外国為替）が原資産の場合はどうでしょう。

ドルコール・オプションについて考えてみます。ドルコールとは権利行使すると円を払ってドルを受け取るオプションなので、原資産はドルです。ドル取引（ドルでの運用や調達）には必ずドル金利が発生しますが、これは株式でいう配当に当たるものだと考えられるので、通貨オプションについて考える場合は配当無しとはいきません。

そのような場合は、オリジナルのブラック＝ショールズ式を通貨オプション等の原資産に配当がある場合にも対応できるように拡張した修正ブラック＝ショールズ式を使用して下さい。

(1) 修正ブラック＝ショールズ式

δ（デルタ）を配当率とする時、オリジナルのブラック＝ショールズ式で S を $S \times e^{-\delta\tau}$に変更した次式を修正ブラック＝ショールズ式と呼び、原資産から配当が発生する場合に使用します。

＜修正ブラック＝ショールズ式＞

コール・プレミアム

$$C = S \times e^{-\delta\tau} \times N(d_1) - e^{-r\tau} \times K \times N(d_2)$$

プット・プレミアム

$$P = S \times e^{-\delta\tau} \times \{N(d_1) - 1\} - e^{-r\tau} \times K \times \{N(d_2) - 1\}$$

ただし

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \delta)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

■ 記号（その他はブラック＝ショールズ式の時と同じ）

δ：配当率（外貨金利） … 連続複利ベース

配当率＝0 とすれば配当の無い原資産の場合も大丈夫なので、本式を使えば配当がある場合、無い場合のどちらにも対応可能です。

配当がある株式を原資産とするオプションを評価する時も修正ブラック＝ショールズ式が使えますが、次のような場合は注意が必要です。

① オプション満期までに配当が発生※21しない場合
② オプション満期までに発生する配当が 1 回しかなく、その額がほぼ確定している場合

＜①の場合＞
オプションが満期を迎えるまではその株式は無配なので、配当が無いものとして評価する方が良いでしょう。

＜②の場合＞
例えば 10 日後に配当が発生して 15 日後にオプションの満期を迎えるような場合について考えてみます。株価が 1,000 円、配当が 20 円（年 1 回）だとすると、配当率 δ ≒2%（連続複利）となります。修正ブラック＝ショールズ式に配当率を入力した時の影響を見てみると、$S \Rightarrow S \times e^{-\delta\tau}$、すなわち修正ブラック＝ショールズ式に入力する原資産価格が 1,000 円⇒1,000 円×$e^{-0.02\times\frac{15}{365}}$≒999.178 円となるだけであり、原資産価格に与える影響は 1 円にも満たないことになります。しかし、実際には 10 日後に 20 円の配当が丸々発生するので、配当落ちが株価に与える影響が 1 円に満たないというのは変な話です。よって、このような場合は 10 日後に発生する配当 20 円を現在の株価から控除して、原資産を配当の無い株式に読み替えた後にブラック＝ショールズ式で評価する方が良いでしょう。
ただし、10 日後に発生する配当 20 円を現在の株価から控除する際は、10 日後の 20 円を現在価値に割り引いてから控除するようにして下さい。

※21 実際の取引においては配当を受け取る権利が確定してから実際に受け取るまでの間にタイムラグが発生するので、ここでの「配当が発生」とは「配当を受け取る権利が確定」することを表しています。

(2) 修正ブラック＝ショールズ式による計算

ブラック＝ショールズ式と同様に、エクセルを用いて計算を行ってみます。

Excel ファイル “Option2_1st.xlsx” シート 1-3

＜エクセルを使った修正ブラック＝ショールズ式の計算＞

先ほど作成したブラック＝ショールズ式計算用シートに少し変更を加えれば、修正ブラック＝ショールズ式に対応できます。変更点は次の 3 つです。

① 入力項目として「配当率 δ」を追加する

② d_1 計算式内の r を $(r-\delta)$ に変更する

③ プレミアム計算式内の S を $S\times e^{-\delta\tau}$ に変更する

まずは入力項目の追加です。仮に δ＝0.015（1.5%）として、セル B6 に追加で入力します。

	A	B
5	r	0.01
6	δ	0.015
7	d1	−0.42248

次は、d_1 の計算式内で r を $(r-\delta)$ に変更すればよいので、セル B7 の数式を「=(LN(B1/B2)+(B5-B6)*B3)/(B4*SQRT(B3))+B4*SQRT(B3)/2」に変更します。

変更箇所

	A	B
5	r	0.01
6	δ	0.015
7	d1	−0.46491

そして最後はプレミアム計算式の変更です。

コール、プット共に S を $S\times e^{-\delta\tau}$ に変更しますが、$e^{-\delta\tau}$は「EXP(-B6*B3)」で計算すればよいですから、コールは「=B1*EXP(-B6*B3)*B10-B9*B2*B11」、プットは「=B1*EXP(-B6*B3)*(B10-1)-B9*B2*(B11-1)」と入力内容を変更すれば完成です。

	A	B
13	Call	33.4367
14	Put	135.4224

以下、完成したシートです（修正ブラック＝ショールズ版）。矢印で差してあるセルが、今回の変更で追加／変更したセルになります。

	A	B
1	S	1000
2	K	1100
3	τ	0.5
4	σ	0.25
5	r	0.01
6	δ	0.015
7	d1	−0.4649096
8	d2	−0.6416863
9	DF	0.99501248
10	N(d1)	0.3209981
11	N(d2)	0.26053845
12		
13	Call	33.4367
14	Put	135.4224

$\delta=0$ として使えば、オリジナルのブラック＝ショールズ式としても機能します。

修正ブラック＝ショールズ版

	A	B
1	S	1000
2	K	1100
3	τ	0.5
4	σ	0.25
5	r	0.01
6	δ	0
13	Call	35.89239
14	Put	130.4061

ブラック＝ショールズ版

	A	B
1	S	1000
2	K	1100
3	τ	0.5
4	σ	0.25
5	r	0.01
6		
13	Call	35.89239
14	Put	130.4061

それでは完成したシートを使って通貨オプションを評価してみましょう。ここでは豪ドルを対象とした満期が半年の通貨オプションを評価対象とします。ただし、市場データとして現在の為替レートが 95.00 円／豪ドル、ボラティリティが 10%、円金利（半年物／連続複利）が 0.5%、豪ドル金利（半年物／連続複利）が 4.5%が得られているとします。

先の条件のもとで行使価格（行使レート）が 94.00 円／豪ドルであるような豪ドルコール・オプションのプレミアムを求めてみましょう。与えられた条件より、S＝95.00、K＝94.00 円／ドル、τ＝0.5 年、σ＝10%、r＝0.5%、δ＝4.5%となるので各パラメータを入力して計算すると次の通りです（プレミアム≒2.22 円）。

	A	B
1	S	95
2	K	94
3	τ	0.5
4	σ	0.1
5	r	0.005
6	δ	0.045
13	Call	2.215963

また他の条件は変えずに、K＝96.00 円／豪ドルとして豪ドルプット・オプションを評価すると次の通りです。

	A	B
1	S	95
2	K	96
3	τ	0.5
4	σ	0.1
5	r	0.005
6	δ	0.045
14	Put	4.340352

正しく計算できなかった方は作成したシートをもう一度見直してみて下さい。

【確認問題 6】

米ドルを対象とする通貨オプションを評価したい。S＝150.00 円／ドル、τ＝0.25 年、σ＝10%、r＝0.5%、δ＝4.2%とする時、次の条件のヨーロピアン・オプションのプレミアムを求めよ。

① ドルコール・オプション（K＝152.00 円／ドル）

② ドルプット・オプション（K＝150.00 円／ドル）

5. ブラックモデル（ブラック 76）

ブラック＝ショールズモデル、修正ブラック＝ショールズモデル共に、オプションの対象となる資産は“現物”に限られます。しかしマーケットでは先物を対象とした取引が多数行われており、それら先物を対象としたオプション取引も存在します。また、オプションと同じデリバティブ取引の一つであるスワップを対象としたオプション取引（スワップション）なども金利の先物オプションとして評価できるので、先物を対象としたオプションを評価するモデル（評価式）が必要となります。その際は、次の**ブラックモデル（ブラック７６式）**を使用することになります。

<ブラック 76 式>

コール・プレミアム

$$C = F \times e^{-r\tau} \times N(d_1) - e^{-r\tau} \times K \times N(d_2)$$

プット・プレミアム

$$P = F \times e^{-r\tau} \times \{N(d_1) - 1\} - e^{-r\tau} \times K \times \{N(d_2) - 1\}$$

ただし

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

■ 記号

F：現在の先物価格

τ：オプション満期までの期間（年）

σ：先物のボラティリティ（%）

（その他はブラック＝ショールズ式の時と同じ）

ここで、τは“先物”の満期でないことに注意して下さい。また、先物が対象とする原資産から配当が発生する場合ですが、オプションの原資産は先物でありその先物には配当は発生しないので、先物オプション評価の際は配当は考慮する必要はありません。ただし、先物価格自体は配当を考慮する形で決まるので、オプションの価値と無関係という訳ではありません。