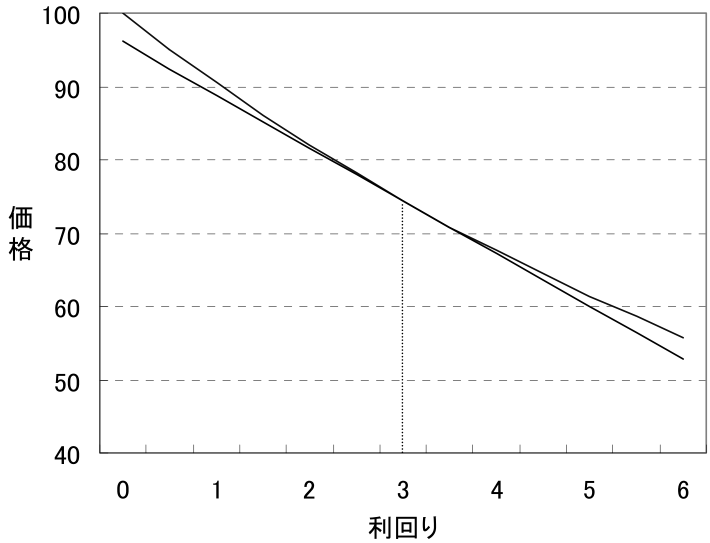
2. デュレーションの導出と利用

(1) デュレーションの導出

さて、微分に関して学んでいただいたので、ここでデュレーションに戻りましょう。第 1 節の（3）「デュレーションとは」の最後で、「デュレーションとは利回り価格曲線に引いた接線の傾きである」と言いました。例えば、既に出てきた期間 10 年の割引債の利回り価格曲線について、現状の利回り＝3.0％として接線を引くと以下の図のようになります。

【図表 2-11】　10 年割引債の利回り価格曲線と接線



では上の図の接線の「傾き＝デュレーション」を求めてみましょう。先ほどの微分の話をちゃんと理解していただいた方なら大丈夫ですよね。

ある関数に引いた接線の傾きを求めるには、その関数を微分して導関数を求めればよいのでした。よって、ここでは債券の利回り価格曲線、すなわち利回りと価格の関係を示す関数を微分して導関数を求めればよいのです。

上のグラフの前提となる利回りと価格の関係を示す関数式は次のようなものでした。

$$P=\frac{100}{(1+r)^{10}} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\ \text{(a)}$$

一般的なｘ－ｙ平面でｙにあたるものがここではＰ（価格）で、ｘにあたるものがｒ（利回り）になります。では微分してください・・・・ちょっと止まっちゃった方もいるでしょうか。先ほど説明した初歩的な微分の知識だけでは少し微分しにくいかもしれません。しかし問題ありません。以下のように考えればよいのです。

a 式の微分

①a 式を以下のように書き換える。

$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$　ですので（第１分冊で学習しました）

$$P=\frac{100}{(1+r)^{10}}=100\times(1+r)^{-10}$$

②　$y=x^n \rightarrow y'=nx^{n-1}$（Ⅱ－２式）を使う。

この公式をそのまま使って[注]

$$P'=100\times(-10)\times(1+r)^{-11} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \text{(b)}$$

注意点は、一応定数 100 がありますが、それはそのまま残る（Ⅱ－３式参照）ことと、$(1+r)^{-10}$ を微分すると、Ⅱ－２ 式におけるｎ＝－10 ですので、－10 が前に来ると同時に、$(1+r)$ の肩にかかっていた－10 が１つ減って（ｎがｎ－１になって）－11 （－9 ではない）となる点です。

b 式のままでは少々不気味ですから、また分数の形に戻してやると

$$P'=100\times(-10)\times(1+r)^{-11}=\frac{-10\times100}{(1+r)^{11}} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\ \text{(c)}$$ 式となります。

[注] 厳密にはここはいわゆる「合成関数の微分法則」を使うべきところですが、ここでは上のような考え方でも同じ結果になります。

これが、10 年の割引債の接線の傾き、すなわちデュレーションを求める式です。では早速現状の利回り＝3.0％として、デュレーション＝接線の傾きを求めてみましょう。

ｃ式のｒに 0.03 を代入すればよいだけですから、具体的に計算してみると、

$\dfrac{-10\times100}{(1+r)^{11}}=-722.421$ となります。

ここで「あれ、計算間違い？」と思われた方もいるかと思います。ここで求めているのは接線の傾きのはず、接線の傾きとは、その接線が横に 1 動いたときの縦軸の変化量とも表現できます。それが－722.421 なんてあり得ない？ちょっと待ってください。確かにここで求めたのは、横軸に利回り、縦軸に価格を取った利回り価格曲線に現状の利回り＝3.0％で引いた接線の傾きです。それが－722.421 というのは間違っていません。間違ったと思った方に思い出していただきたいのは、ここで考えている、横軸に取った利回りの値の単位のことです。

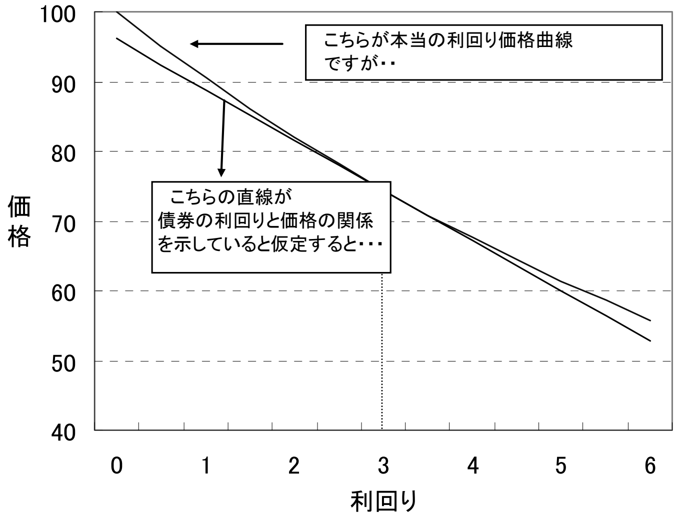
確かにグラフとして示す場合は、横軸には％単位の利回りの値を並べていますが、実際にグラフの前提となっているａ式における利回り、すなわちｒの値は％単位ではありません。従って、横に 1 動くというのは 100％動くということを示しています。横に 100％動くというのは、先ほどのグラフで言うと、右方向に、表示されている部分をはるかに越えた遠くまで動いた場合の、縦軸の動きです。ですから、間違っていません。まだピンと来ないという方もこれから、実際にいろいろ計算して行けば間違っていないことが納得できるかと思います。

(2) デュレーションの意味

さて、問題はこの－722.421 という値が債券投資において持つ意味とその利用法です。

ここでこんなことを考えてみましょう。実際の債券の利回り価格曲線は、先ほどもみたように、中央部が少し下にたわんだ形の曲線ですが、もしその曲線が直線だったら？つまり、現状の利回りで引いた接線の上を債券の価格が動くのだと仮定してみるのです。

割引債の利回り価格曲線と接線

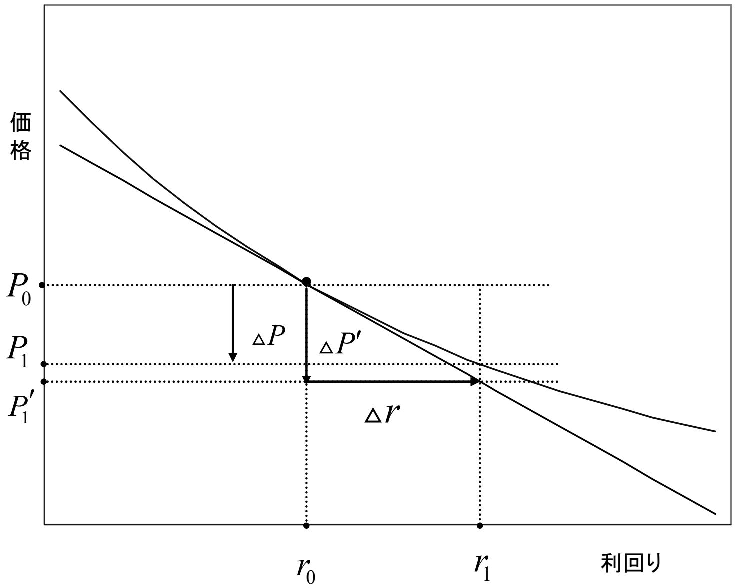


もし、上図の接線上を債券の利回りと価格を示す点が動いていくとすると、その場合−722.421 という値は何を意味しているでしょうか。それはこういうことです。この−722.421 という値は、上図の接線の（縦軸の変化量）÷（横軸の変化量）の比を表しているので、利回りの変化にこの値を賭け合わせると、縦軸の変化、すなわち価格変化が計算できることになるのです。

すでに明らかかも知れませんが、一応以下の図で確認してみましょう。

■　デュレーション（＝接線の傾き）を使った債券価格変化の計算

【図表 2-12】



上の図表 2-12 は、債券の利回り価格曲線と、それに現在の利回りで引いた接線を表しています。現在の債券の利回りは r_0 、価格は P_0 です。債券の利回りが、今、 r_0 から r_1 に上昇したとすると、債券の価格は P_0 から P_1 に下落します。しかし、「仮に」債券の価格が、上の接線の上を動いていくとすると、利回りが r_1 に上昇したとすると価格は P_1' まで下落することになります。

以上の利回りの変化及び、価格変化をそれぞれ、

・利回りの r_0 から r_1 への上昇：Δr （$= r_1 - r_0$）

・価格の P_0 から P_1 への下落：ΔP （$= P_1 - P_0$）

・価格の P_0 から P_1' への下落：$\Delta P'$ （$= P_1' - P_0$）

という記号で表すとすると、

$\Delta P'$（接線上を債券価格が動いていくと仮定した場合の価格変化）は

$$\Delta P' = \Delta r \times \frac{\Delta P'}{\Delta r}$$

と表すことができますが、$\dfrac{\Delta P'}{\Delta r}$ という値は、「接線の傾き」ですから（上図で確認してください)、この式を言葉で表現すれば

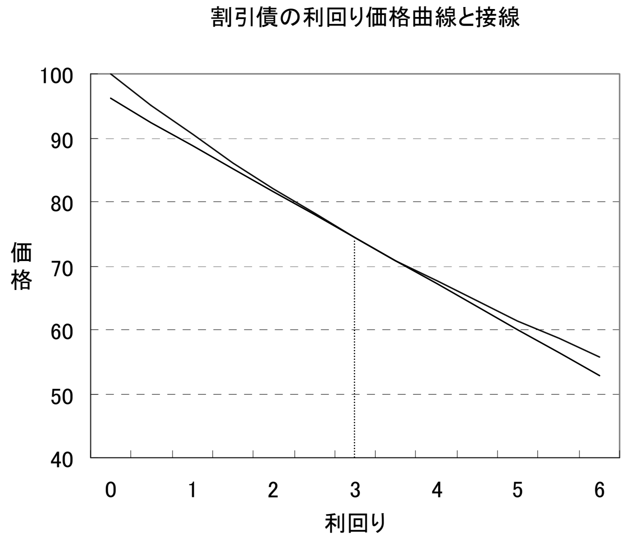
$\Delta P'$ = 利回り変化× 「接線の傾き」

となります。

つまり、先ほど述べたように、実際の利回り価格曲線の上ではなく、そこに引いた接線の上を債券価格が推移すると「仮定」すれば、そのときの価格変化は、利回り変化×接線の傾きで計算できるわけです。

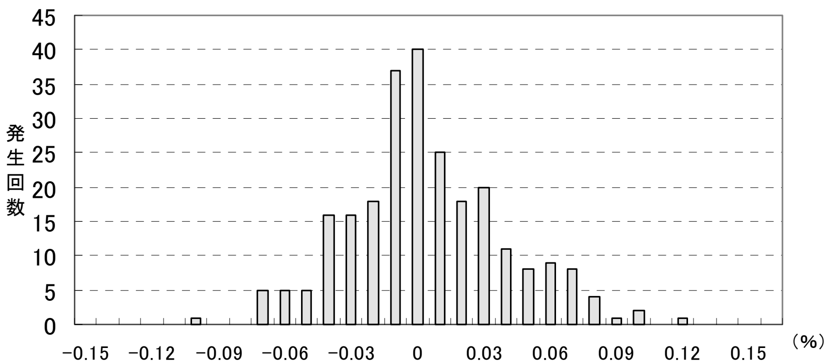
しかし、ここで当然、「さっきから、『接線の上を価格が推移するとすれば』とか言っているけれど、実際の債券の価格はあくまで利回り価格曲線の上を動いていくわけでしょ？何の意味があるの？」という疑問が湧くことと思います。

疑問はもっともですが、もし実際の債券においては、利回り価格曲線と接線がほとんどくっついているとしたらどうでしょう？「また変な話を・・。先ほど出てきたグラフでも利回り価格曲線と接線ははっきりと別のものだったじゃない」と思われるかもしれません。たしかに以下の 10 年の割引債について 2-11 図（再掲）では、利回り価格曲線と接線は別のものであることがはっきりわかります。



しかし、ここで注意していただきたいのは、この図の横軸の単位の取り方です。現状の利回りを 3.0％として、利回りが±3％の範囲をグラフにしています。しかし、債券の利回りの変化に関して、一般論を言えば、±3％の変動というのはかなり大きな利回り変化といえます。例えば以下は 2008 年の 10 年長期国債（直近の新発物）の１日での利回り変化をグラフ化したものです。横軸が 0.1％の刻み幅でとった利回り差、縦軸が１年間でその刻み幅に含まれる利回り変化になった日数を表示しています。

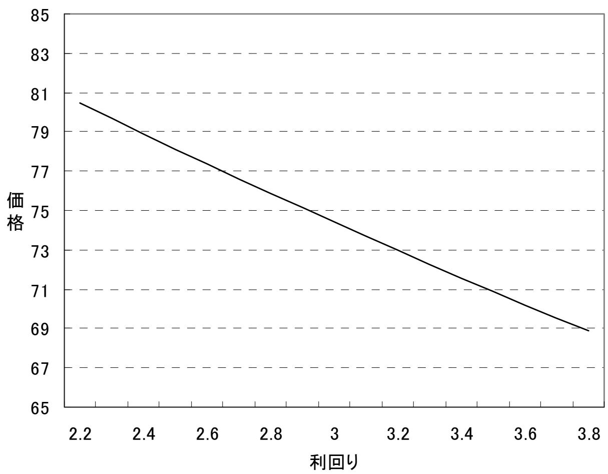
【図表2-13】 10年長期国債の日次利回変化のグラフ



グラフから明らかなように、利回り変化は大体±0.1％ぐらいの範囲に収まっています。もちろん、このような利回り変化は債券によっても、それから時期によっても異なりますが、一般論として国債の１日あたりの利回り変化はどんなに大きくても 0.2％とかいう程度です。もちろん、長期間の間の利回り変化は結構大きいこともあるでしょうが、ここでは、基本的にある一時点での債券の利回りと価格の関係に基づき考えているので、そもそも長期間での債券価格変化は分析の対象に入っていません。

よって、債券の種類にもよるでしょうが、せいぜい１ヶ月といった短期間の間の債券の利回り変化は、一般論としてそれほど大きいものではないので、先ほどの利回り価格曲線のグラフの横軸の幅をぐっと狭くしてみます。3.0％を中心に±0.8％の範囲の利回りと価格の関係を示すと以下のようになります。

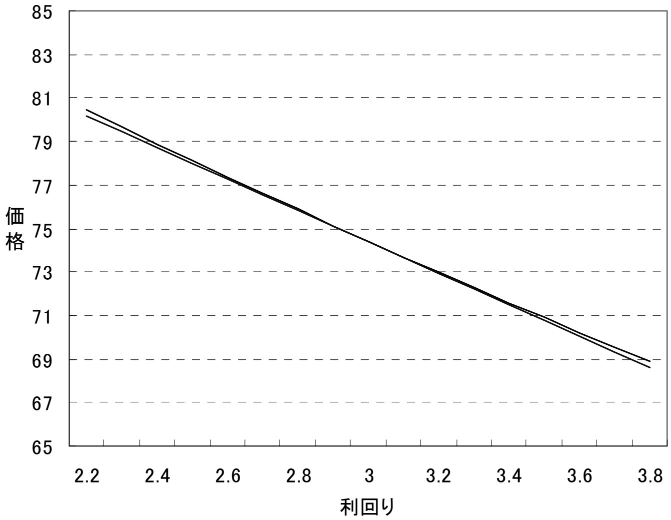
【図表 2-14】10 年割引債の利回り価格曲線（利回変化幅小）



どうでしょうか？これは接線ではなく利回り価格「曲線」ですが、直線のように見えませんか？どの程度直線に近いかを調べるため、現在の利回り＝3.0％で、この利回り価格曲線に接線を引いてみましょう。

それが次の図です。

【図表 2-15】10 年割引債の利回り価格曲線と接線



図で下の方を走っているのが接線ですが、端的にいって「接線も利回り価格曲線もほとんど同じ」ところを動いていることがわかると思います。

もちろん、利回り価格曲線と接線は違いますから、「ほとんど同じ」と言えるかどうかは債券投資の目的やシチュエーションによって変わってきます。しかし一般論としては（一般論が多くて申し訳ありませんが）、ほとんど同じと言ってよいでしょう。

つまり、債券の利回り変化が「それほど」大きくないと想定される場合は、基本的に利回り価格曲線≒接線と考えることができます。

ここで再び図表 2-12 を使っての議論に戻りましょう。図表 2-12 で、接線上の価格の動き $\Delta P'$ は、利回り変化×接線の傾きで表現できることを見ましたが、利回り変化がそれほど大きくないと想定されるような場合は、接線と利回り価格曲線は非常に近接していますから、$\Delta P'$ と真の価格変化 ΔP はほとんど同じ値のはずです。

つまり、真の価格変化 ΔP も「近似値」としては利回り変化×接線の傾きとして計算できるわけです。ここで「接線の傾き」を「デュレーション」と呼び換えると、結局

ΔP ≒利回り変化×デュレーション（＝接線の傾き）・・・・・Ⅱ－９式

と表現できることになります。(≒は「ほぼイコール」を表す記号)

つまり、一定の利回り変化を前提に考える場合、デュレーション（の絶対値）が大きい債券ほど、価格変動（の絶対値）が大きい、ということができるわけです。すなわち、比較的短期間の債券価格の変動などを問題にしているようなケースでは、デュレーションが債券の価格変動性の尺度と考えられるわけです。

●●　式の整理②

・デュレーションに基づく債券価格変化の表現

「それほど利回り変化が大きくない場合」債券の価格変化は　以下の式で近似的に表現できる。

債券の価格変化≒利回り変化×デュレーション・・・・・Ⅱ－9 式

なお、上式におけるデュレーションとは、利回り価格曲線に引いた接線の傾きのことである。

・Ⅱ－9 式を前提に考えれば、デュレーションが大きな債券ほど、一定の利回り変化に対する価格変化が大きいことになる。つまり、一般的に言って、**デュレーションは債券の価格変動性の尺度**と考えることができる。

(3) デュレーションによる価格変動計算

それでは、本節（1）で計算した、現在の利回りが 3.0%である期間 10 年の割引債のデュレーション値：－722.421 を使って、この割引債の価格変動の計算をしてみましょう。

現在の本債券の利回りは 3.0%で、そのときの価格が 74.409 円。債券の利回りが 3.1%に上昇すると、そのときの価格は 73.691 円。価格は
73.691－74.409＝－0.718 円　低下することになります。

Ⅱ－9 式にもとづき、この価格変化を「近似的に」表現してみると、
利回り変化＝0.001（＝0.1%）、デュレーション（接線の傾き）＝－722.421