② スポット・レートの算出方法

① で述べたようにスポット・レートとは、端的に言えば割引債の複利ベースの利回りです。満期まで 1 年、2 年、3 年、……、10 年といった割引国債が、国債市場で売買され価格形成が行われていれば、そのデータを使って簡単に 1 年物、2 年物、3 年物、……、10 年物のスポット・レートを入手できるはずです。しかしながら流通している割引国債はごくわずかですし、期間も片寄っています。

このような現状では、どのようにしてスポット・レートを求めればよいのでしょうか。実務的には、利付債の利回りを用いてスポット・レートを計算しています。価格がパー（価格が償還価格と一致している）の利付債の利回りを**パー・レート**と呼びます。後で学習しますが、この場合、パー・レートはクーポン・レートに一致するので、パー・レートからスポット・レートを求める方法がとられるのです。そこで、今度は次のような疑問が生まれるでしょう。「パー・レートはどのようにして求めるの？　全ての期間にわたって価格がパーの国債市場なんて、現実問題としては考えられないでしょう。」その通りです。パー・レートも市場から直接的には得られません。でも、ここでは勉強の都合上、得られるものとして考えて下さい。パー・レートについてはさらに勉強がすすんだ段階で再び考えます。

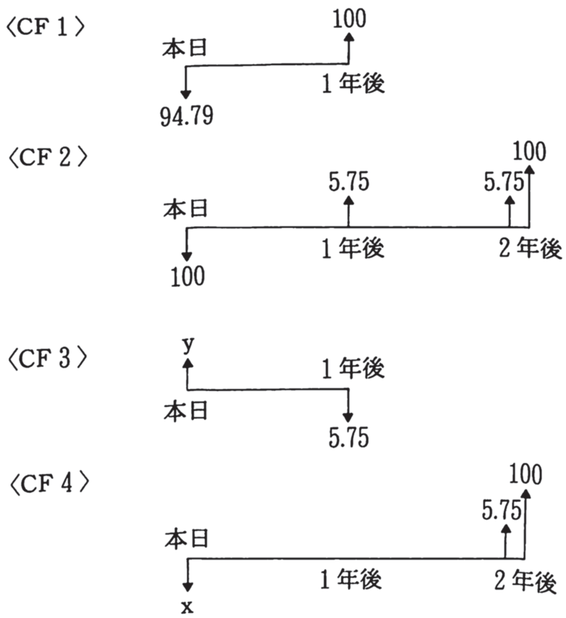
以上ご了解をいただいた上で、利付債のパー・レートを用いてスポット・レートを求める方法を学習しましょう。

今、割引債としては 1 年物しかなく、2 年物は利付債しかなく、1 年割引債の年利回りが 5.50%、2 年利付債の年利回りは 5.75%と与えられているとします。

周知のとおり割引債と利付債との違いは、クーポン支払いの有無にあります。図表 1-21 で、CF（キャッシュ・フロー）1 は年利回り 5.50%の 1 年割引債のキャッシュ・フローを、CF2 は年利回り 5.75%の 2 年利付債のキャッシュ・フローをそれぞれ示したものです。割引債の利回りは、スポット・レートそのものですから、1 年スポット・レートは年 5.50%です。問題は 2 年スポット・レートですが、これを考えるために図表 1-21 の CF1 と CF2 を比較してみましょう。これからわかるように、CF1 と CF2 との違いは、期間途中のキャッシュ・フロー（クーポン支払い）の有無にあります。従って、2 年スポット・レートを計算するためには、CF1 と同じような途中のクーポン支払いのないキャッシュ・フローを考えることから始めることになります。このキ

ャッシュ・フロー・パターンを示したのが、図表 1- 21 の CF4 です。CF4 は単に CF 2 の 1 年後のクーポン支払いのキャッシュ・フロー（中間利払い）をなくしただけのものですが、これがキャッシュ・フロー CF2 で示される利付債と同じ価値を持たなければなりませんから、スタート時のキャッシュ・フローは、100 ではありません。また、満期償還額が 100 ではありませんが、キャッシュ・フロー・パターンから、CF 4 は割引債と考えられることは理解できるでしょう。

図表 1- 21　利付債と同価値を持つ割引債の創出 (1)



ここで問題なのは、x がいくらになるかです。CF4 は、CF2 の 1 年後のクーポン支払いのキャッシュ・フローをなくしたものですから、CF4 において x がいくらになるかを考えるためには、CF3 のようなキャッシュ・フローを考えることになります。つまり、CF2 の 1 年後の 5.75 のキャッシュ・フローの現在価値（y）を求めることに他なりません。y は、1 年スポット・レート 5.50%を割引率として使うことにより次のように求められます。

$$y = \frac{5.75}{1.055} = 5.45$$

何度も繰り返しになりますが、CF4 は CF2 の 1 年後のキャッシュ・フロー5.75 だけ少ないわけですから、CF4 のスタート時の値（x）は CF2 の 100 に比べて、先ほど計算したy（5.75 の現在価値= 5.45）だけ小さくなります。なお、CF 4 は図表 1- 21 より理解できると思いますが、CF2 と CF3 のキャッシュ・フローを合計したものになっています。つまり、xは、

$$\mathrm{x} = 100 - y = 100 - 5.45 = 94.55$$

となるわけです。以上より、2 年スポット・レートは、CF4 に示されるような 2 年割引債の利回りを計算して、次式より 5.76%と求められます。

$$\left(\sqrt{\frac{105.75}{94.55}} - 1\right) \times 100 = 5.76\text{（\%）}$$

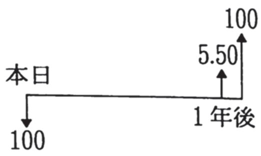
さて、以上が 1 年割引債利回りと 2 年利付債のパー・レートから、1 年、2 年のスポット・レートを計算する方法です。もし、1 年割引債も存在しないような場合には、どのような計算になるでしょうか。

これは、図表 1- 22 に示したようなケースです。図表 1- 22 の CF1 は、図表 1- 21 の CF1 の代わりに 1 年パー・レート 5.50%の利付債のキャッシュ・フローが示されています。このキャッシュ・フロー・パターンからわかることは、図表 1- 22 の CF1 は、1 年後のキャッシュ・フローが 100 でないという違いがありますが、1 年割引債のキャッシュ・フロー・パターンに他なりません。ということは、ここで与えられているパー・レートが、1 年スポット・レートに他ならないことは、次式からも確認できます。

$$\left(\frac{105.5}{100} - 1\right) \times 100 = 5.50\%$$

図表 1- 22　利付債と同価値を持つ割引債の創出(2)

〈CF 1〉



一般にm年のパー・レートを ${}_0l_m$で、m年のスポット・レートを ${}_0r_m$で示すことにすると、m年のスポット・レートは次式で示すことができるので、〔**例題１０**〕の解説を読んだ後、検証して下さい。

なお、 ${}_0l_m$、 ${}_0r_m$とも元本 1 に対する利息表示で、例えば 7.00%の場合 ${}_0l_m$、 ${}_0r_m$は 0.07 を意味するものとし、また全て 1 年複利の世界で考えることとしています。

$$
{}_0r_m = \left[\frac{1 + {}_0l_m}{1 - {}_0l_m\left\{\frac{1}{1 + {}_0r_1} + \frac{1}{\left(1 + {}_0r_2\right)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\left(1 + {}_0r_{m-1}\right)^{m-1}}\right\}}\right]^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad \text{(5)式}
$$

なお、$\frac{1}{m}$ 乗は m 乗根（ $\sqrt[m]{\ }$ ）と同じです。

〔**例題１０**〕

価格パーの利付債年利回り（年 1 回利払い）が、市場から次のとおり入手されました。

1 年　6.00%

2 年　6.50%

3 年　7.00%

4 年　7.50%

5 年　8.00%

この時、以下の問に答えて下さい。

a) 1年スポット・レートを求めて下さい。

b) 2年スポット・レートを求めて下さい。

c) 3年スポット・レートを求めて下さい。

d) 4年スポット・レートを求めて下さい。

e) 5年スポット・レートを求めて下さい。

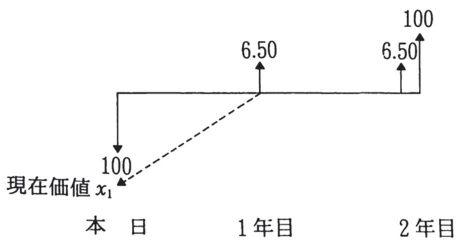
〔解説〕

◆ a) は1年パー・レートと同一ですから、6.00%です。

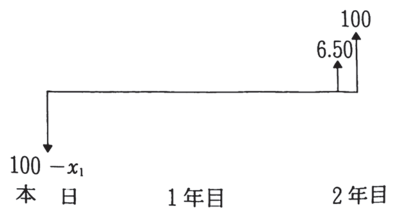
b) 以降は、先程学習したように、価格パーの利付債年利回り（年1回利払い）のキャッシュ・フローと同価値を持つ割引債を考えて、スポット・レートを求めていきます。

◆ b) 2年

[利付債]



[割引債]



利付債の1年目のキャッシュ・フロー6.50の現在価値 x_1 は、1年スポット・レートが6.00%ですから、

$$x_1 = \frac{6.50}{1.06} = 6.1321$$

と求められます。従って、2 年利付債と同価値を持つ割引債の投資価格は、

$$100 - x_1 = 93.8679$$

となります。この 2 年割引債の償還価格は 100 ではなく 106.50 ですが、価格 93.8679、償還まで 2 年、償還価格 106.50 の割引債とみなせることに変わりはありません。

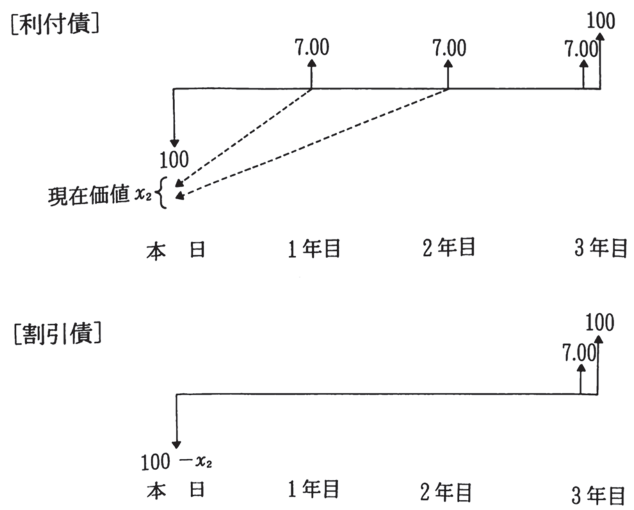
よって、2 年スポット・レートは、

$$\left(\frac{106.50}{93.8679}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{\frac{106.50}{93.8679}} - 1 = 0.06516\ (= 6.52\%)$$

と求められます。

以下同様に、3 年目、4 年目、5 年目と求められます。

◆ c) 3 年



$$利付債の 1 年目のキャッシュ・フローの現在価値 = \frac{7.00}{(1 + 0.06)} = 6.6038$$

利付債の 2 年目のキャッシュ・フローの現在価値を求めるには、今算出した 2 年スポット・レートを当然使います。

$$\text{利付債の 2 年目のキャッシュ・フローの現在価値} = \frac{7.00}{(1+0.06516)^2} = 6.1698$$

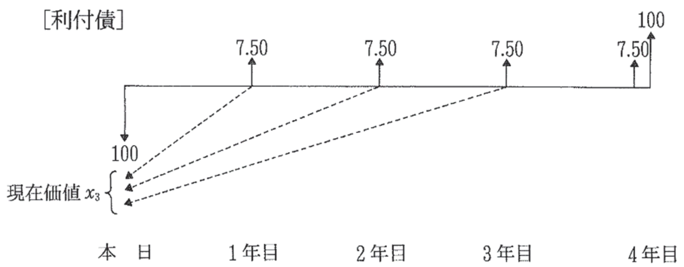
よって、

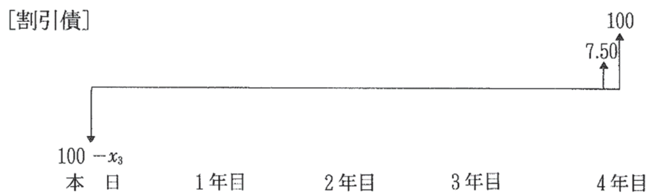
$$x_2 = 6.6038 + 6.1698 = 12.7736$$

$$3\text{ 年スポット・レート} = \left(\frac{107}{100-12.7736}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{107}{87.2264}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$
$$= 0.07048\ (=7.05\%)$$

エクセルを使う場合は「 = (107/87.2264)^(1/3)－1 」と入力してください。

◆ d）4 年





$$\text{利付債の 1 年目のキャッシュ・フローの現在価値} = \frac{7.50}{(1+0.06)} = 7.0755$$

$$\text{利付債の 2 年目のキャッシュ・フローの現在価値} = \frac{7.50}{(1+0.06516)^2} = 6.6105$$

$$利付債の3年目のキャッシュ・フローの現在価値 = \frac{7.50}{(1+0.07048)^3} = 6.1140$$

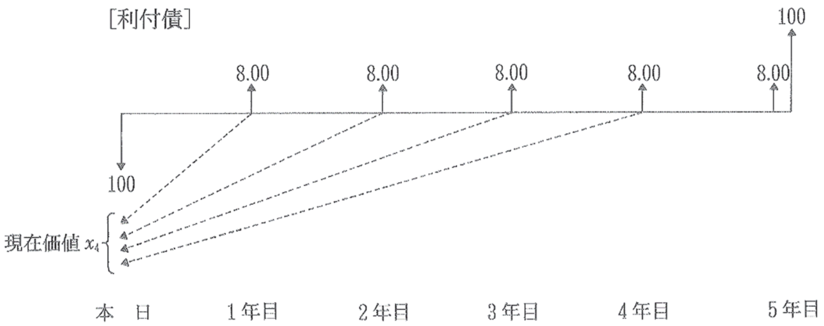
よって、$x_3 = 7.0755 + 6.6105 + 6.1140 = 19.80$

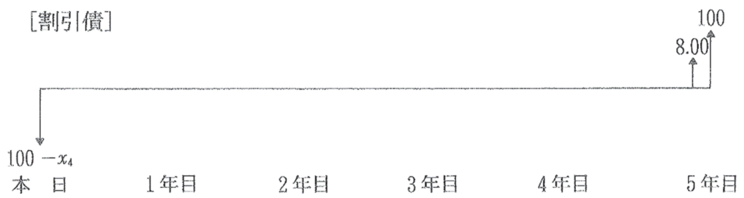
$$4年スポット・レート = \left(\frac{107.5}{100-19.80}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(\frac{107.5}{80.20}\right)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$= 0.07599$（$= 7.60\%$）

4 乗根は前述した通り、「√」キーを 2 回押すことにより求められます。

◆ e) 5 年





$$利付債の1年目のキャッシュ・フローの現在価値 = \frac{8.00}{(1+0.06)} = 7.5472$$

$$利付債の2年目のキャッシュ・フローの現在価値 = \frac{8.00}{(1+0.06516)^2} = 7.0512$$

$$利付債の3年目のキャッシュ・フローの現在価値 = \frac{8.00}{(1+0.07048)^3} = 6.5216$$

$$\text{利付債の 4 年目のキャッシュ・フローの現在価値} = \frac{8.00}{(1+0.07599)^4} = 5.9684$$

よって、$x_4 = 7.5472 + 7.0512 + 6.5216 + 5.9684 = 27.0884$

$$\text{5 年スポット・レート} = \left(\frac{108}{100-27.0884}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(\frac{108}{72.9116}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$= 0.08175$ （$= 8.18\%$）

3 年と同様、エクセルを使って計算してみてください。

以下、a）は計算不要なので、b）から 42 ページの(5)式を使って求めてみましょう。

b）は(5)式において、m＝2 として求められます。

$$_0r_2 = \left[\frac{1+0.065}{1-0.065\times\dfrac{1}{1+0.06}}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.06516 \text{（}= 6.52\%\text{）}$$

c）は(5)式において、m＝3 として求められます。

$$_0r_3 = \left[\frac{1+0.07}{1-0.07\times\left\{\dfrac{1}{1+0.06}+\dfrac{1}{(1+0.06516)^2}\right\}}\right]^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.07048 \text{（}= 7.05\%\text{）}$$

d）は(5)式において、m＝4 として求められます。

$$_0r_4 = \left[\frac{1+0.075}{1-0.075\times\left\{\dfrac{1}{1+0.06}+\dfrac{1}{(1+0.06516)^2}+\dfrac{1}{(1+0.07048)^3}\right\}}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$$

$= 0.07599$ （$= 7.60\%$）

e）は(5)式において、m＝5 として求められます。

$$_0r_5 = \left[\frac{1+0.08}{1-0.08\times\left\{\dfrac{1}{1+0.06}+\dfrac{1}{(1+0.06516)^2}+\dfrac{1}{(1+0.07048)^3}+\dfrac{1}{(1+0.07599)^4}\right\}}\right]^{\frac{1}{5}} - 1$$

$= 0.08175$ （$= 8.18\%$）

なお、本問において、1 年から 5 年までパー・レートが同水準であれば、これに対応するスポット・レートも全てパー・レートと等しくなるので覚えておくと便利です。

ここで (5)式をもう一度見て下さい。この式は、パー・レートとスポット・レートの関係を示す式です。我々は今、この式を使ってパー・レートからスポット・レートを求めました。ということは、**スポット・レートがわかれば、(5) 式を使いパー・レートを求められる**ということです。スポット・レートが金利の中心であるということは、これからの勉強を通じより深く理解されると思いますが、そうであるとすれば、スポット・レートが国債市場から直接的に入手され、これが基本となってパー・レート体系が構築される国債市場の姿が理想的であるといえましょう。不満を言っても始まりませんが、割引国債市場をより充実させ、これに伴って利付国債市場もより充実していくというのが、理論面からいくと望まれる市場の姿なのです。

まとめとして、〔**例題１０**〕のパー・レートと、パー・レートから求めたスポット・レートを表にしておきましょう。

期間	パー・レート	スポット・レート
1 年	6.00%	6.00%
2 年	6.50%	6.52%
3 年	7.00%	7.05%
4 年	7.50%	7.60%
5 年	8.00%	8.18%

【練習問題９】

市場より現在のパー・レートとスポット・レートの関係が、次のとおりであることがわかりました。

（単位：年率%）

	パー・レート	スポット・レート
1 年	6.00	6.000
2 年	6.50	6.516
3 年	6.75	6.779
4 年	6.50	6.495
5 年	6.25	6.213

以上を前提に、以下に示される金額の現在価値を求めて下さい（円未満を四捨五入して、整数で答えて下さい)。

(1)　1 年後の 10,000 円

(2)　2 年後の 10,000 円

(3)　3 年後の 10,000 円

(4)　4 年後の 10,000 円

(5)　5 年後の 10,000 円

【練習問題１０】

価格パーの利付債利回り（年 1 回利払い）が、市場から次のとおり入手されました。

(1)　1 年　5.00%

(2)　2 年　5.50%

この時、1 年および 2 年スポット・レートを求めて下さい。

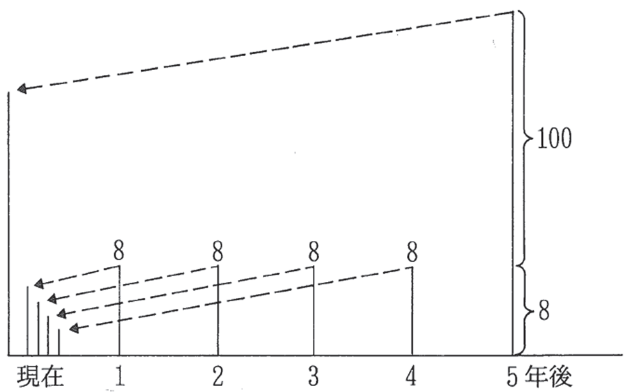
3. 債券の価格とその計算

(1) 債券価格計算の基礎

債券の現在価値は、債券から生じる将来のキャッシュ・フローの現在価値を計算することによって求めることができます。このようにして求められる債券の現在価値は、債券の理論価格と呼ばれています。

他の投資と同様、債券の現在価値（理論価格）は、債券所持者が受取る権利のある、将来のキャッシュ・フローの現在価値の合計として表すことができます。例えば、額面 100 円、期間 5 年、クーポン・レート年 8.00%（年 1 回利払い）の利付債を考えて下さい。この債券は、図表 1- 23 に示されるとおり、毎年 8 円、満期には利息 8 円、元本 100 円、合計 108 円のキャッシュ・フローを将来発生させることになります。これらキャッシュ・フローの現在価値の合計額が、とりもなおさずこの債券の本日における理論価格になるわけです。

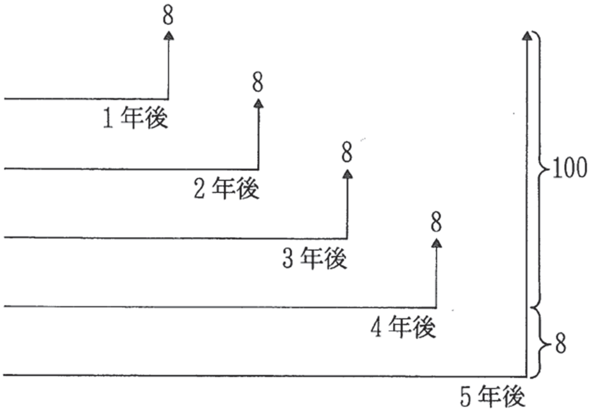
図表 1- 23　利付債のキャッシュ・フロー



このことは、次のように考えるとより深く理解できるでしょう。

図表 1- 23 において将来発生するキャッシュ・フローを 1 本毎に分解して示すと、図表 1- 24 のようになります。これを見ると、1 本 1 本が割引債の形になっていることに気付くでしょう。このように考えると、利付債とは割引債の集合体であると表現できます。そして、これら割引債から将来発生するキャッシュ・フローの現在価値、すなわち割引債の理論価格の合計額が、利付債の理論価格となるのです。

図表 1- 24　分解されて示される利付債のキャッシュ・フロー



なお、上記のように利付債のキャッシュ・フローを、クーポンを実際に切り離すことにより割引債を作り、これが市場で売買されることもあります。これが**ストリップス債**（STRIPS bond）と呼ばれるものです。

以上のことから、年１回 C（円）の利払いが行われる、額面価格が Q（円）で、満期までの期間（残存期間と呼ばれます）n年の利付債の場合、この債券の理論価格 P は、

$$P = \frac{C}{\left(1 + {}_0r_1\right)} + \frac{C}{\left(1 + {}_0r_2\right)^2} + \frac{C}{\left(1 + {}_0r_3\right)^3} + \cdots + \frac{C + Q}{\left(1 + {}_0r_n\right)^n} \qquad \text{(6)式}$$

また、額面価格が Q（円）で満期までの期間 n 年の割引債の場合、この債券の理論価格 P は、(6)式における C をゼロと置くことによって（割引債はクーポン支払いがゼロだからです）、

$$P = \frac{Q}{\left(1 + {}_0r_n\right)^n} \qquad \text{(7)式}$$

という式で、それぞれ計算されます（但し、${}_0r_1$、${}_0r_2 \cdots {}_0r_n$ は、それぞれ１年、２年…n 年スポット・レートです）。

特殊なケースとして、**フラット・イールド・カーブ（全期間にわたってスポット・レートが同水準）**の状況下における債券の理論価格式が求められます。フラット・イ

ールド・カーブの状況下においては、

$$ {}_0r_1 = {}_0r_2 = {}_0r_3 = \cdots = {}_0r_n \ (= r) $$

ですから、(6)式は、

$$ P = \frac{C}{1+\mathrm{r}} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+\mathrm{r})^3} + \cdots + \frac{C+Q}{(1+r)^n} \qquad (6)\text{'式} $$

となり、また、(7)式は、

$$ P = \frac{Q}{(1+r)^n} \qquad (7)\text{'式} $$

とスッキリした形で表現できます。

【注　意】

ここで約束事をしておきたいと思います。フラット・イールド・カーブの状況がもたらされるのは、現実のマーケットにおいては極めてまれな現象です。しかしながら、このような状況を想定すると、債券価格式は全期間共通のスポット・レート（r）を使ってスッキリと表現できます。取り扱うスポット・レートが、n個より 1 個の方が勉強のスタートとしてはずっと楽です。従って、今後しばらくの間、フラット・イールド・カーブの状況の下で債券の数理を考えていくことにします。当然のことですが、このような制約は、ストラテジーをいろいろ考えていく段になるとおのずと限界がきます。その時になったら、この制約を解除する旨、明示することにしますのでご了承ください。

〔例題１１〕

期間 10 年、クーポン・レート 8.00%（年 1 回利払い、額面 100 円）の利付債について考えて下さい。

a） スポット･レートを年率 8.00%とする時の債券価格を求めて下さい。

b） スポット･レートを年率 7.00%とする時の債券価格を求めて下さい。

c） スポット･レートを年率 9.00%とする時の債券価格を求めて下さい。

〔解説〕

利付債の理論価格は、(6)’式に該当する数値を代入することにより求められます。

a ）55 ページの図表 1- 25 は、この問題を解くために作成したものです。まず、毎年 8 円ずつクーポンが、10 年目にはクーポンと元本の合計 108 円が発生することが示されています。債券価格は、これらキャッシュ・フローの現在価値の合計で次のように求められます。

$$1\text{ 年後に回収される 8 円の現在価値} = \frac{8}{1+0.08} = 7.41\text{（円）}$$

$$2\text{ 年後に回収される 8 円の現在価値} = \frac{8}{(1+0.08)^2} = 6.86\text{（円）}$$

以下、同様に、

$$10\text{ 年後に回収される 108 円の現在価値} = \frac{108}{(1+0.08)^{10}} = 50.02\text{（円）}$$

このようにして求められた現在価値が、図中では斜線が施されて示されています。これら現在価値の合計は 100 円となり、これが本日におけるこの債券の価格となります。この場合、価格が額面（100 円）と一致していることに注意して下さい。**クーポン・レートとスポット・レート（割引率）が等しい場合、債券価格は常に額面と等しくなるのです。この時、この債券は「パーである」といいます。**

b）56 ページ図表 1- 26 が、このケースです。

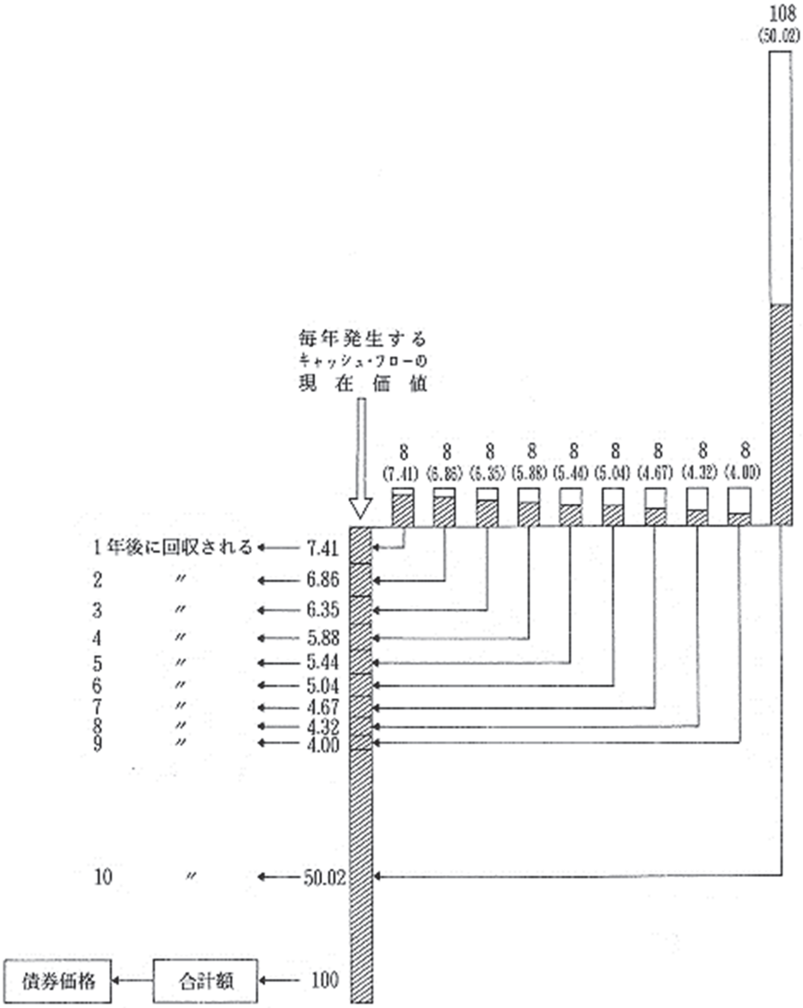
債券の価格は 107.02 円となります。価格が額面（100 円）より高くなることに注意して下さい。**クーポン・レートに比べスポット・レート（割引率）が低い場合、債券価格は額面を上回ります。この時、この債券は「オーバー・パーである」といいます。**

c) 57 ページ図表 1- 27 が、このケースです。

債券の価格は 93.58 円となります。価格が額面（100 円）より低くなることに注意して下さい。**クーポン・レートに比べスポット・レート（割引率）が高い場合、債券価格は額面を下回ります。この時、この債券は「アンダー・パーである」といいます。**

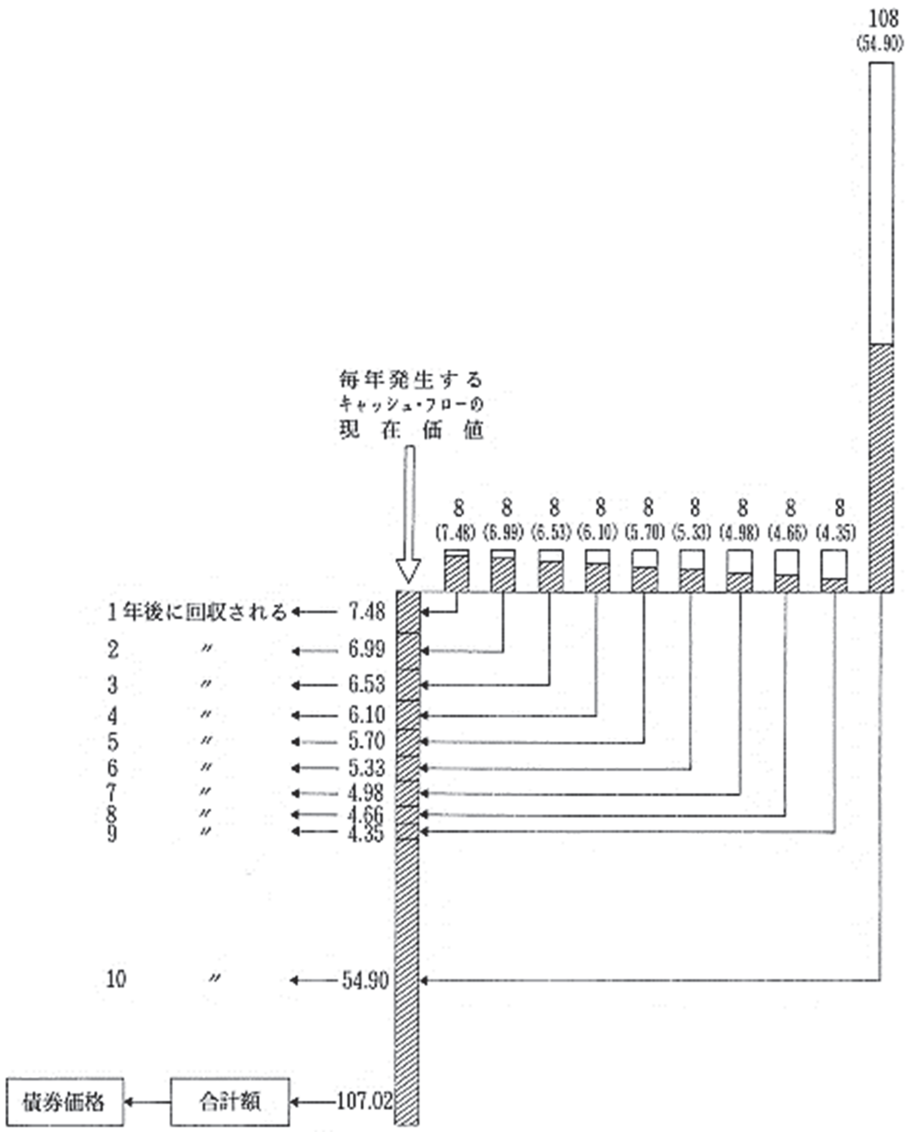
図表 1- 25　期間 10 年 8.00%クーポン債（年 1 回利払い、額面 100 円）の債券価格

（スポット・レートが年率 8.00%の時）



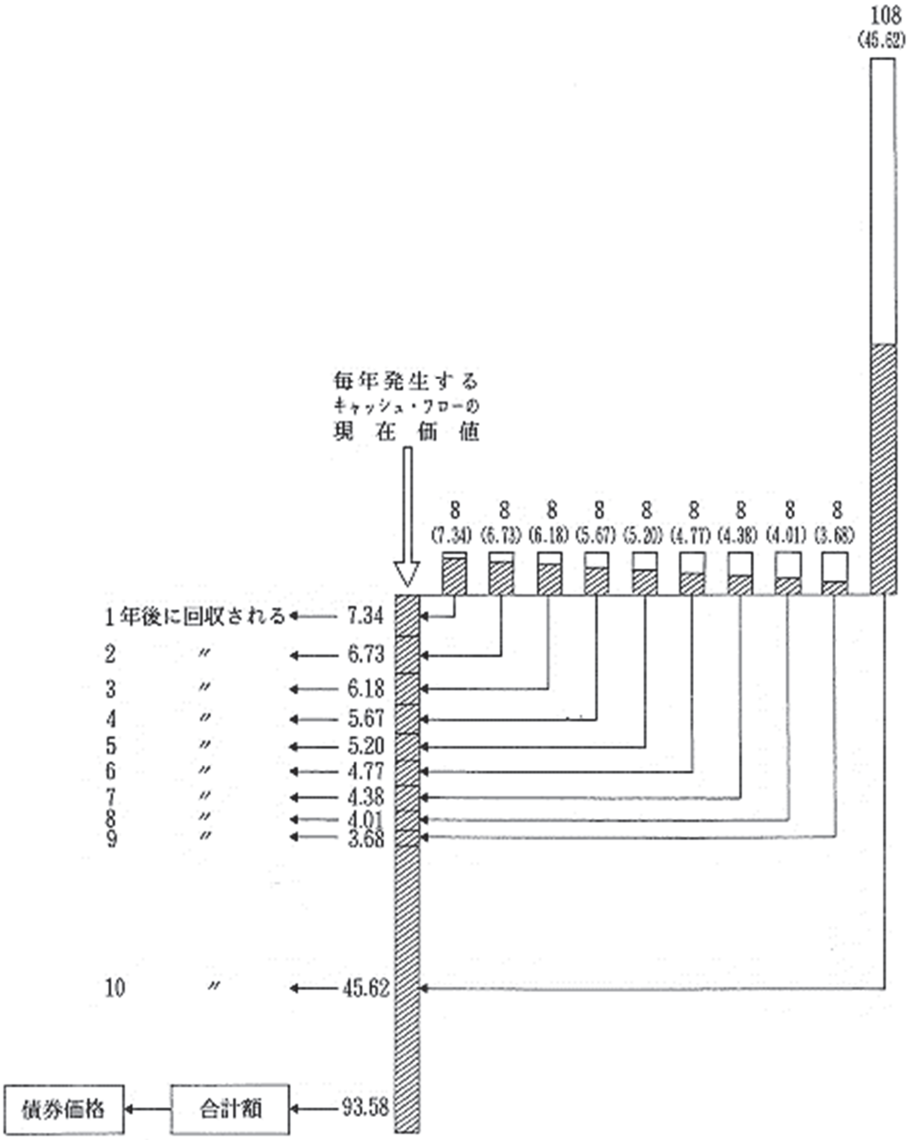
図表 1- 26　期間 10 年 8.00%クーポン債（年 1 回利払い、額面 100 円）の債券価格

（スポット・レートが年率 7.00%の時）



図表 1- 27　期間 10 年 8.00%クーポン債（年 1 回利払い、額面 100 円）の債券価格

（スポット・レートが年率 9.00%の時）



〔例題１２〕

期間 10 年、額面 100 円の割引債について考えて下さい。

a）スポット・レートを年率 8.00%とする時の割引債価格を求めて下さい。

b）スポット・レートを年率 7.00%とする時の割引債価格を求めて下さい。

c）スポット・レートを年率 9.00%とする時の割引債価格を求めて下さい。

〔解説〕

割引債の理論価格は、52 ページの(7)'式に該当する数値を代入することにより求められます。もう、図がなくても大丈夫ですね。

$$\text{a）価格} = \frac{100}{(1+0.08)^{10}} = 46.32\text{（円）}$$

$$\text{b）価格} = \frac{100}{(1+0.07)^{10}} = 50.83\text{（円）}$$

$$\text{c）価格} = \frac{100}{(1+0.09)^{10}} = 42.24\text{（円）}$$

〔例題１３〕

52 ページの(6)' 式は、次のようにも表現できることを証明して下さい。

$$P = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \times C + \frac{Q}{(1+r)^n} \qquad \text{(8)式}$$

数学が苦手な人は本問を飛ばしてもらっても、以降の勉強に不都合は生じません。

〔**解説**〕（証明）

(6) ’式は、次のように変形できます。

$$P=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{C+Q}{(1+r)^n}$$

$$=\underbrace{\left\{\frac{1}{(1+r)}+\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{1}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right\}}_{\text{A 部分}}\times C+\frac{Q}{(1+r)^n}$$

ところで、A 部分は初項 $\frac{1}{(1+r)}$、公比 $\frac{1}{(1+r)}$ の等比級数の初項より第n項までの和となっています。従って、下に示した等比級数の和の公式を使い、

$$\text{A 部分}=\frac{1}{(1+r)}\times\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}=\frac{1}{(1+r)}\times\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{\frac{1+r-1}{(1+r)}}$$

$$=\frac{1}{r}\times\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}=\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}$$

$$P=\left(\text{A 部分}\right)\times C+\frac{Q}{(1+r)^n}$$

ですから、

$$P=\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}\times \mathrm{C}\frac{Q}{(1+r)^n}$$

と表すことができます。（証明終わり）

等比級数の和の公式

初項a、公比x（≠1）の等比級数の初項より第n項までの和

（$a+ax+\cdots+ax^{n-1}$） は、

$$\sum_{i=1}^{n}ax^{i-1}=a\cdot\frac{1-x^n}{1-x}$$

で表せます。

〔例題１４〕

スポット・レートは、年率 5.00%です。3 年 6.00%債（額面 100 円、年 1 回利払い）の価格を、52 ページの(6)'式を利用する場合と、58 ページの(8)式を利用する場合の両方で求めて下さい。

〔解説〕

(6)'式による場合

$$\frac{6}{1+0.05}+\frac{6}{(1+0.05)^2}+\frac{106}{(1+0.05)^3}=102.72\text{（円）}$$

(8)式による場合

$$\frac{(1+0.05)^3-1}{0.05\times(1+0.05)^3}\times 6+\frac{100}{(1+0.05)^3}=102.72\text{（円）}$$

一般に残存期間の長い債券価格計算は、(6)'式よりも(8)式を利用する方が計算が容易であるといえます。本テキストでは考え方のメカニズムがよくわかる(6)'式を使っていきますが、皆さんは好きな方をお使いいただいて結構です。

ところで、利付国債は半年毎にクーポン支払いが発生します。つまり、国債は半年複利の世界なのです。従って、期間 n 年の国債の理論価格（P）は、(6)'式を次のように修正して求めることになります。

$$\text{国債の理論価格}(P)=\frac{\frac{C}{2}}{1+\frac{r}{2}}+\frac{\frac{C}{2}}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}+\frac{\frac{C}{2}}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^3}+\cdots+\frac{\frac{C}{2}+Q}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}} \qquad \text{(9)式}$$

なお、r は年率表示のスポット・レート、C は 1 年分のクーポン（円）、Q は額面価格です。

また、額面価格が Q（円）で満期までの期間 n 年の割引国債の場合、半年複利ベースの理論価格は、(9)式における C をゼロと置くことによって、

$$\text{割引国債の理論価格}(P)=\frac{Q}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}} \qquad \text{(10)式}$$

という式で、それぞれ計算されます。

〔例題１５〕

(1)　期間 10 年、クーポン・レート 8.00%（額面 100 円、年 2 回利払い）の利付債について考えて下さい。

a）　スポット・レートを年率 8.00%とする時の債券価格を求めて下さい。

b）　スポット・レートを年率 7.00%とする時の債券価格を求めて下さい。

c）　スポット・レートを年率 9.00%とする時の債券価格を求めて下さい。

(2)　また、スポット・レートが 8.00%の時、期間 10 年、額面 100 円の割引債の価格を半年複利で求めて下さい。

〔解説〕

(1)

a）　このケースの場合は、クーポン・レート＝スポット・レートですから、計算するまでもなく 100 円ですが、念のため計算式を示しておきましょう。受講生の皆さんは 58 ページの(8)式で計算した方が楽ですよ。

$$P=\frac{\frac{8}{2}}{1+\frac{0.08}{2}}+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2}}+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{3}}+\cdots+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{19}}+\frac{\frac{8}{2}+100}{\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{20}}$$

$=100$（円）

b）

$$P=\frac{\frac{8}{2}}{1+\frac{0.07}{2}}+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.07}{2}\right)^{2}}+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.07}{2}\right)^{3}}+\cdots+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.07}{2}\right)^{19}}+\frac{\frac{8}{2}+100}{\left(1+\frac{0.07}{2}\right)^{20}}$$

$=107.11$（円）

c)

$$P=\frac{\frac{8}{2}}{1+\frac{0.09}{2}}+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{2}}+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{3}}+\cdots+\frac{\frac{8}{2}}{\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{19}}+\frac{\frac{8}{2}+100}{\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{20}}$$

$$=93.50\text{（円）}$$

(2)

$$P=\frac{100}{\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{20}}=45.64\text{（円）}$$