３．VaR の基本概念

（１）「ばらつき」＝リスク量　でよいか？

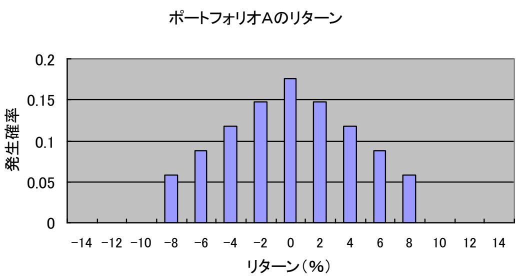
分散もしくは標準偏差で表されるところの「リターンのばらつき」が一つのリスク指標となることを説明したが、リターンのばらつきでは一般的なリスク管理指標としては不十分、不正確な面がある。

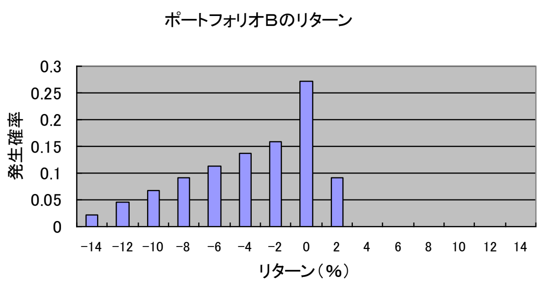
というのは、リスクというのは最終的には「大きな損失の発生可能性」ということであるから、いくら「リターンのバラつき」が大きくても、かりに利益が出る方向にばかりばらついていれば、あまりリスクは無いわけであるし、逆に、分散の値などはそれほど大きくなくても、リターンが低い方にばかりばらついているというのではリスクは大きいということになる。バラつきが大きい＝大きな損失の発生可能性が大きい　と言えるためには、基本的には損益の発生が左右対称形状という前提が必要である。

■　上の議論のイメージ

以下のようなリターンの分布を持つ２つのポートフォリオがあるとする。一般論としてはリスクはどちらの方が大きいだろうか？

→　普通はＢと考える。　しかしリターンの分散自体はＡの方が大きい。





このように、リターンの分布が「左右対称」でないときには、分散や標準偏差はリスクの指標としづらい。

このようなことから、もっと端的に「大きな損失の発生可能性」としてのリスク量を表す数値として、1990 年代半ばに JP morgan によって提唱され、一般に普及したリスク指標が「VaR（Value at Risk、バリュー・アット・リスク）」と呼ばれるものである。

VaR については昨今の金融危機を経てその功罪がいろいろ問題にされているが、やはり現在におけるリスク定量化の考え方のスタンダードであることは間違いない。以下この概念の基本的な内容について説明する。

（２）VaR とは

VaR とは、具体的には**「起こり得るある一定の範囲の損益の中で最悪の損失金額をリスク量として認識する」**という考え方を言う。

「起こりえるある一定の範囲の損益の中で」というところがポイントである。「起こりえる中で最悪」だと、これまで金融機関が経験した中でも最悪の事態を常に想定してリスク量を考えるようなイメージになるが、あまりリスクを過大視しすぎることも金融機関の経営に悪影響を及ぼす。

よって、「起こりえるある一定の範囲の損益の中で」としているのである。

通常「起こり得るある一定の範囲の損益」を決める際には、良い方、すなわち利益が高い方から数えて○○％まで、という形で決める。

例えば、今ある金融商品から<u>１週間後に</u>発生する損益が以下の 10 個の値のどれかだと仮定する。

＊発生する可能性のある損益

－8　－6　－4　－2　±0　＋2　＋4　＋6　＋8　＋10

この場合「信頼水準 90％」の VaR 値というものを考えると、答えは－6 となる。つまり起こり得る損益を「良い方」から数えて 90％までがここでは「一定の範囲の損益」と認識し、その中で最悪の損失が－6 ということである。

－8　－6　－4　－2　±0　＋2　＋4　＋6　＋8　＋10

良い方から数えて 90％

一定の範囲（信頼水準）

「信頼水準（区間）」とは、全事象に占める「一定の範囲」の事象の比率を表す。また、VaR では一般に、今からある将来の一時点までの間に発生し得ると考えられる損益を対象として算出するが、この、今からある一定の将来までの期間（損益を考える期間）の長さのことを**「保有期間」**という言い方をする。よって上の例は<u>「保有期間 1 週間、信頼水準 90％の VaR」</u>を求めた例と言える。

保有期間も信頼水準も常に決まった値をとるわけではない。ただ、一般に市場リスク（相場の変動による金融商品の価格変化に基づくリスク）については保有期間は長くとも 2 週間ぐらいの短い期間にすることが多く、信頼水準は 99％という値がよく使われる。信用リスクは、保有期間は 1 年にとることが多く、信頼水準は 99.9％などがよく使われる。

（３）VaR の計算例

VaR の概念は以上のようなものであり、特に難しいものではないが、具体的な計算方法となると、いろいろな手法があり、細かな論点も多い。高度な統計学を駆使した計算方法なども行われているが、まずもっともプリミティブな計算例を紹介する。

（課題１）（添付エクセルファイル　シート＜２-VaR＞参照）
トヨタ株式を現在 10 億円保有しているとする。「保有期間１日、信頼水準 99%」のＶａＲを算出する。過去のデータから特別な統計学の知識などを使わないで算出する場合どうしたらよいか。

トヨタ株式の１日当たりリターン（日次変化率）を R_T とすると、本ポートフォリオから明日までの１日で発生する時価変動は

10 億円× R_T

と表すことができるから、トヨタ株式の日次リターン R_T について「信頼水準 99%（良い方から数えて 99%の値）」の値を求め、それを 10 億円に掛け合わせればよい。しかし、もちろん R_T を当てずっぽうに決めたりすることはできないから、通常は過去データに基づき何らかの方法によりこの R_T を決めることになる。

R_T の具体的な決め方、求め方はさまざまなものが考えられるが、もっとも素朴な計算方法としては、過去のデータから、実際に「良い方から 99%」の値を求める方法が考えられる。

例えば、仮に上の問題を 2016 年３月末の時点で考えるとしたら、そこから以下のように 1000 営業日分の過去のトヨタの日次変化率を具体的に調べてみる。

Data NO	日付	株価	変化率（%）
1	2016/3/31	5952	−0.80
2	2016/3/30	6000	−2.50
3	2016/3/29	6154	−1.11
4	2016/3/28	6223	0.70
5	2016/3/25	6180	2.81
6	2016/3/24	6011	−1.56
7	2016/3/23	6106	0.13
1000	2012/3/5	3305	−0.30

こうやって集めた 1000 個の実際の日次リターンを、昇順に並び替え、小さい方から 10 番目を「信頼水準 99%」のリターンの値とするのである。

実際に調べてみると

2015 年 9 月 10 日の－4.22%という値がこの値になる。

よって、10 億円のトヨタ株式ポートフォリオの「保有期間 1 日、信頼水準 99%」の VaR として

10 億円×－4.22%＝－42.2 百万円　という値を得る。

このように、VaR の値を、過去のデータそのものから計算する VaR 計算手法を**「ヒストリカル・シミュレーション法」**と呼んでいる。この手法は考え方はプリミティブであるが、現実の複雑な市場を処理する方法としては落ち着き所として良く、また考え方がわかりやすいという大きなメリットがあるので、最近は金融機関の「正式な（外部に VaR の数値を出すときの）」VaR 計算手法として有力な手法となってきている。

しかし、実際の金融機関のポートフォリオは非常に数多くの資産からなり、その中には店頭デリバティブのように、自分たちで複雑な計算を駆使して価格を計算したりする商品も存在する。したがって実際の金融機関のポートフォリオでヒストリカル・シミュレーションを実行することは意外に大変な作業になることが多い。近年ヒストリカル・シミュレーション法が有力になってきた背景としては、金融機関にデータが蓄積され、リスク管理体制が高度化してきたら対応が可能になったという面もあるようだ。

ヒストリカル・シミュレーション法が広まる前は、金融商品の価格変化に**「正規分布」**と呼ばれる確率分布をあてはめて VaR を計算する**「分散共分散法（デルタ法）」**と呼ばれる手法が主流であった。これは VaR 概念の提唱者である JPmorgan が、1990 年代半ばに具体的な計算方法を開示したペーパーで示した手法でもあり、理論的には VaR 計算手法の基礎になるものとも言ってよい。

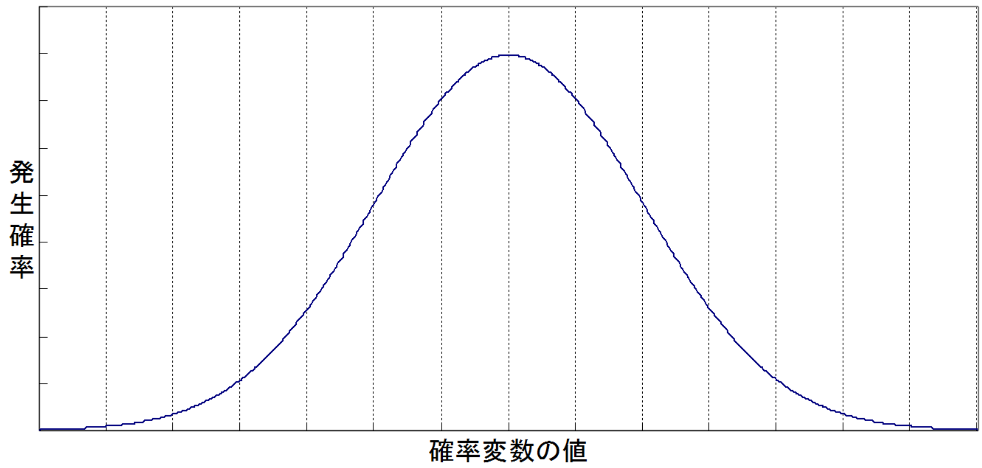
そこで、次に分散共分散法、さらにはこの手法理解のために必須である正規分布の概念についてポイントを説明することとする。

４．正規分布とリスク定量化

（１）正規分布（Normal Distribution）とは

正規分布とは、数多く存在する統計学上定義された確率分布の中でも、もっとも重要、かつ様々な分野で利用されることが多い確率分布である。数学的に説明しようとすると難しい面もあるので、まず、確率分布としての基本イメージを述べると、縦軸に発生確率、横軸に確率変数の値をとった図で示せば以下のような「山型（釣鐘型ともいう）」形状をとる分布といえる。

正規分布



分布の山頂にあたるところが、ちょうど期待値にあたる。つまり正規分布においては期待値がもっとも発生しやすい値ということになる。さらに期待値を中心に左右対称の形状をとる。したがって、正規分布の場合、期待値＋αの値と期待値－αの値の発生しやすさは同じである。期待値や標準偏差の値については何の制約もない。つまりどんな小さな（大きな）期待値、どんな小さな（大きな）標準偏差の正規分布というものもあり得る。

（２）連続型の確率変数について

前頁で、正規分布の確率分布の図（グラフ）を示したが、厳密にはこの図にはおかしな点がある。

実は正規分布は**「連続型の確率変数」**と呼ばれるものであって、ある特定の値の発生確率、発生頻度というものは考えられないのである。

何を言っているの？　という方が多いと思うので説明しよう。

連続型の確率変数とは、確率変数の値が、飛び飛びでなく、「連続的に」値をとると考えられるタイプの確率変数を言う（一方飛び飛びの値をとる確率変数は「離散型」の確率変数という）。

例えば、針を回すルーレットで、止まった針の位置を 0 度から 360 度の範囲で限りなく正確に読み取れるようなものがあるとする。このルーレットの針の止まる位置が全く偶然に決まるとすれば、このルーレットを回して決まる針の位置は確率変数と考えられる。

一方、この針の位置は、前提として「限りなく針の位置を正確に読み取れる」ということなので、その値は「連続的」になる（180 の次は 180.1 というような飛び飛びではない）。

このように、連続的に値をとると考えられる確率変数を**「連続型の確率変数」**と呼ぶ。

連続型の確率変数の場合、基本的にある特定の値になる確率というものは考えられない。例えば今の例であれば、ぴったり 180 度になったりすることはありえない（180.00001 とか 17.9999998 とかのはず）から、連続型の確率変数については、ある値になる確率＝○○％というようには確率を決められない。そこで連続型の確率変数については、必ず値の「幅」に対して確率を付与する。例えば先ほどのルーレットで言えば、（針の止まりやすさが盤面のどこも同じとすれば）90 度以上 180 度以下になる確率＝1/4 という具合である。

この例からもわかると思うが、厳密に連続型の確率変数といえるような現象を現実に見出すことは不可能である。その意味で連続型の確率変数とはあくまで数学上の概念に過ぎない。しかも、イメージできると思うが、この概念は深く考えていくとかなり取扱いの難しい概念である[注]。このようになかなか難しい概念であるが、例えば株式のリターンの分布について何か特定の確率分布をあてはめようというときに、株式のリターンというものには無数とも呼べる値の種類があるため、離散型の確率変数よりは連続型の確率変数をあてはめた方が良さそうだということはイメージできると思う。

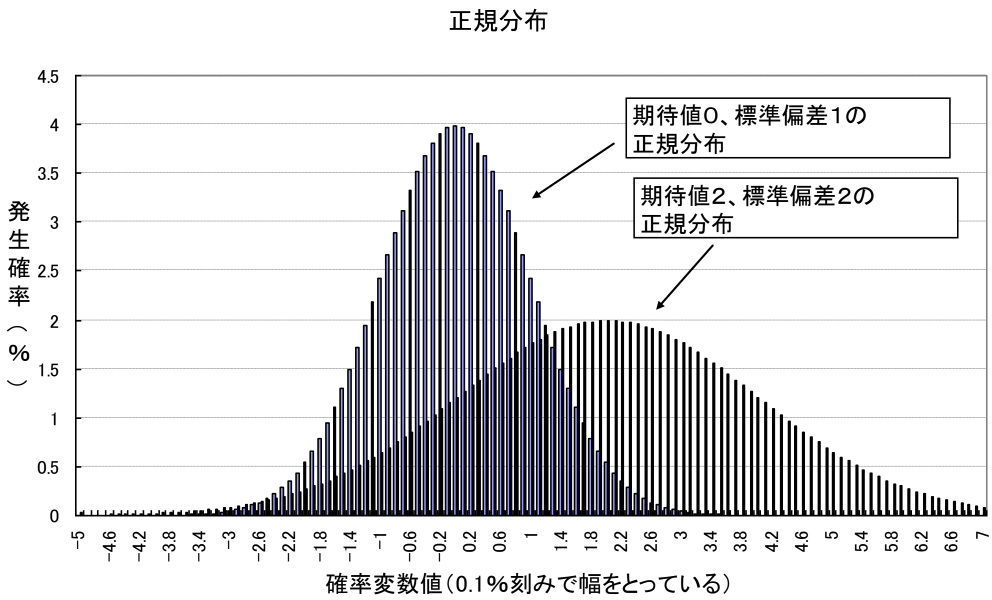
正規分布は連続型の確率変数を前提にしたものなので、正しく図示しようとすれば、先のような図ではなく、以下のようなヒストグラムとして表す必要がある。正規分布は、期

[注] よくデリバティブの価格理論は難しいと言われるが、真に難しい部分はデリバティブ価格理論というよりそこで使われている連続型の確率変数を利用した数学の部分である。

待値や標準偏差の値については何の制約も無いので、具体的な分布としては無数のパターンがあるが、ここでは「期待値ゼロ、標準偏差１」の正規分布と「期待値２、標準偏差２」の正規分布について図示してみた（添付エクセルファイル　シート＜２－正規分布＞参照）

■　正規分布の「正しい」分布図の例

→　確率変数値を 0.1%刻みで区切り、各範囲の値をとる確率を示したもの



（３）正規分布の実務上重要な特徴

正規分布は実務で非常によく利用される確率分布なので、その主な特徴を知っておくことが有益である。以下に主な特徴を掲げる。

①　値はマイナス無限大からプラス無限大までの範囲の値を取る。

②　期待値を中心に左右対称の分布である。

③　期待値と分散（標準偏差）の値が決まれば確率分布は一つに決まる。

④　期待値を中心に、標準偏差（σ）を基準として、分布確率が決まる。
例えば、ｋを任意の定数として、期待値＋ｋ×標準偏差　以下の値をとる確率はすべての正規分布で同じである。（当然　期待値＋ｋ×標準偏差　以上の値をとる確率も同じ）

⑤　Ｘ、Ｙをそれぞれ正規分布に従う確率変数とすると、この２つの確率変数の線形結合で表現される確率変数はやはり正規分布に従う。
（Ｘ、Ｙが正規分布　→　αＸ＋βＹ［α、βは定数］　も正規分布）

■　④の例

例えばｋ＝1.5　として　期待値＋1.5×標準偏差　以下の値をとる確率はどんな正規分布でも 0.9332。

よって、期待値＝1.0、標準偏差 2.0 の正規分布に従う確率変数の場合 4.0（＝1.0＋1.5×2.0）以下の値をとる確率が 0.9332 になり、 期待値＝0.5、標準偏差 1.0 の正規分布に従う確率変数の場合　2.0（＝0.5＋1.5×1.0）以下の値をとる確率が 0.9332 になる。

期待値０、標準偏差１の正規分布を特に「標準正規分布」という。④の性質より、正規分布については、どんな（期待値、標準偏差の）正規分布でも、標準正規分布に置き換えて確率計算をすることができる。オプションの有名な価格計算式「ブラック・ショールズ・モデル」を始め、金融の世界では標準正規分布を利用して色々な計算を行うことは非常に多い。

標準正規分布に従う確率変数Ｘが、ある値α以下の値を取る確率は、EXCEL の関数 NORMSDIST で計算できる。

■　NORMSDIST を利用した正規分布の確率計算の例

例えば、期待値 1.5、標準偏差 2.2 の正規分布に従う確率変数が 4.14 以下の値をとる確率を計算したいとする。EXCEL 関数 NORMSDIST を利用して計算する場合は以下のようにして計算できる。

①　4.14 という値に対応する以下の式の″k″の値を求める。

４．1=4　1k．5×　（＝期待値＋ｋ×標準偏差）

→k=1.2

②　k=1.2 に対応する標準正規分布の値を求める。

0＋1.2×1.0＝1.2

<u>標準正規分布は期待値ゼロ、標準偏差１なので、期待値＋ｋ×標準偏差＝ｋ</u>

③ NORMSDIST で標準正規分布に従う確率変数が 1.2 以下の値をとる確率を求める。

EXCEL で=NORMSDIST(1.2)　という計算をすればよい。(答：0.88493)

＜確認問題５＞

確率変数Ｘと確率変数Ｙはそれぞれ、以下のような期待値と標準偏差値の正規分布に従う確率変数であるという。

このとき、以下の（ア）（イ）に入る数字をそれぞれ答えよ。

なお、$P(X \leq \alpha)$ とは確率変数Ｘがα以下の値をとる確率を示す。

確率変数	期待値	標準偏差
X	1.0	2.0
Y	－1.2	3.4

①　$P(X \leq 3.0) = P(Y \leq (ア))$

②　$P(X \geq 2.2) = P(Y \geq (イ))$

③　①と②の確率を EXCEL の関数 NORMSDIST を使ってそれぞれ計算してみよ。