

計算ファイナンス

上村 昌司

この資料は筆者が東京工業大学大学院イノベーションマネジメント研究科で行った講義「計算ファイナンス」の講義ノートをもとめたものである。講義ノート全体を通しての整合性は配慮していない。章によって使う記号が異なっていたり、同じ内容を2つの章で扱っていることもある。

目次

0	参考文献	3
1	オプションの価格付け	5
1.1	無裁定価格理論	5
1.2	確率過程入門	7
1.3	オプション価格理論	13
1.4	通貨オプション	18
1.5	計算ファイナンスの目的	19
1.6	数値計算手法の種類	20
2	ツリーモデル	21
2.1	2項ツリーモデル (CRR モデル)	21
2.2	アメリカンオプション	26
2.3	2項モデルの収束性など	28
2.4	振動収束の解消方法	28
2.5	ヘッジ指標の計算	31
2.6	ブラウン運動のツリー	34
2.7	Richardson の補外法	36
2.8	多次元ツリー	38
2.9	3項ツリーモデル	41
2.10	金利モデル	45
2.11	まとめ	50
3	有限差分法	51
3.0	参考文献	51
3.1	有限差分法の概要	51
3.2	陽解法	53

3.3	陰解法	58
3.4	Crank-Nicolson 法	60
3.5	リスク指標	64
3.6	アメリカンオプションの評価	65
3.7	バリアオプションの評価	67
3.8	境界条件について	69
3.9	変数変換	69
4	モンテカルロ法	70
4.1	モンテカルロ法の基礎	70
4.2	分散減少法	76
4.3	準モンテカルロ法	85
4.4	並列計算	89
4.5	リスク指標	91
4.6	付録：マリアバン解析の応用	99
4.7	アメリカンオプションの価格付け	112
5	アメリカンオプションの価格付け	126
5.1	アメリカンオプション	126
5.2	動的計画法によるアメリカンオプションの価格付け	127
5.3	2項モデルによるアメリカンオプションの価格付け	128
5.4	モンテカルロ法によるアメリカンオプションの価格付け	132
6	パラメータ推定と Black-Scholes モデル	140
6.1	最尤法	140
6.2	期待リターンの推定	143
6.3	インプライドボラティリティ	144
6.4	収益率の正規性	146
7	さまざまなオプション価格付けモデル	149
7.1	局所ボラティリティモデル	149
7.2	確率ボラティリティモデル	149
8	確率微分方程式の近似	157
8.1	収束の次数	157
8.2	Euler-丸山近似	158
8.3	Milstein 近似	161
8.4	2 次の方法	162
8.5	外挿法	167

0 参考文献

日本語で読めるオプション価格理論に関する参考文献を挙げておく。

- 『Options, Futures, and Other Derivatives』, John Hull, (日本語訳あり)
- 『Investment Science』, David G. Luenberger, Oxford Univ Pr, (日本語訳『金融工学入門』今野浩他訳, 日本経済新聞社)
- 『Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model』, S.E.Shreve, Springer, (日本語訳『ファイナンスのための確率解析 I』, 長山いづみ他訳, シュプリンガーフェアラーク東京)
- 『Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models』, S.E.Shreve, Springer, (日本語訳『ファイナンスのための確率解析 II』, 長山いづみ他訳, シュプリンガーフェアラーク東京)
- 『Arbitrage Theory in Continuous Time』, T. Bjork, Oxford Univ Pr. (日本語訳『ビョルク 数理ファイナンスの基礎—連続時間モデル』前川功一訳, 朝倉書店)
- 『数理ファイナンス』, 関根順, 培風館
- 『Dynamic Asset Pricing Theory』, J.Darrell Duffie, Princeton Univ Pr. (日本語訳『資産価格の理論—株式・債券・デリバティブのプライシング』山崎昭他訳)

確率過程, 確率微分方程式に関する数学の参考文献.

- 『確率論の基礎』, 伊藤清, 岩波書店
- 『確率論』, 伊藤清, 岩波書店
- 『確率微分方程式』, 渡辺信三, 産業図書
- 『確率と確率過程』, 楠岡成雄, 岩波書店
- 『確率微分方程式』, 長井英生, 共立出版
- 『確率微分方程式』, 舟木直久, 岩波書店
- 『Stochastic Differential Equations, An introduction with application』, B.Øksendal, (日本語訳あり)
- 『Brownian Motion and Stochastic Calculus』, I.Karatzas and S.E.Shreve, Springer, (日本語訳あり)

計算ファイナンス全般についてはつぎのような本がある.

- 『コンピューティショナル・ファイナンス』, 森平爽一郎・小島裕, 朝倉書店
- 『ファイナンス工学入門 第 III 部』, 木島正明他, 日科技連
- 『Implementing Derivatives Models』, L. Clewlow and C. Strickland, Wiley&Sons
- 『Options, Futures, and Other Derivatives』, John Hull, (日本語訳あり)
- 『Dynamic Asset Pricing Theory』, J.Darrell Duffie, Princeton Univ Pr. (日本語訳『資産価格の理論—株式・債券・デリバティブのプライシング』山崎昭他訳) の第 12 章 (翻訳では第 11 章)

モンテカルロ法についてはつぎのような本がある.

- 『Quantitative Methods in Derivatives Pricing』, D. Tavella, John Wiley& Sons
- 『Monte Carlo Methods in Financial Engineering』, P. Glasserman, Springer

Glasserman は網羅的であり、通読するにも辞書的に使うにも適している。このテキストのモンテカルロ法の部分は Glasserman の本を参考にしてている。

数値計算についてはつぎの本が定番。

- 『Numerical Recipes in C』 H. P. William 他 (日本語訳『ニューメリカルレシピ・イン・シー日本語版-C 言語による数値計算のレシピ』, 丹慶勝市他訳, 技術評論社)

他の言語版 (C++ など) の Numerical Recipes もある。通読する本ではなく辞書的に使うべき本。この本に出ているアルゴリズムは計算ファイナンスでは常識として断りなく (オリジナルの文献を引用することなく) 使ってよいと思う。

R についての書籍はいろいろ出ているが、使い方やインストール方法などを含めほとんどの情報はインターネット上でとることができる。たとえば、

- 『RjpWiki』 (<http://www.okada.jp.org/RWiki/>)

は非常に参考になる。また、はじめて R を使う人にとって

- 『R-Tips』 (<http://cse.naro.affrc.go.jp/takezawa/r-tips/r2.html>)

という Web ページがよいと思う。このページに内容をまとめた PDF ファイルがおいてあるので、それを読めば大体のことは分かる。また R にはパッケージという形でさまざまな外部プログラムが公開されている。計算ファイナンス関連には

- Rmetrics (<https://www.rmetrics.org/>)
- RQuantLib (<http://dirk.eddelbuettel.com/code/rquantlib.html>)

というパッケージがある。RQuantLib は QuantLib (<http://quantlib.org/>) という C++ のライブラリ群を R から使えるようにしたものである。QuantLib は非常に充実している。また、

- 『実務家のためのオプション取引入門』 佐藤 茂, ダイヤモンド社
- 『Frequently Asked Questions in Quantitative Finance』 P. Wilmott

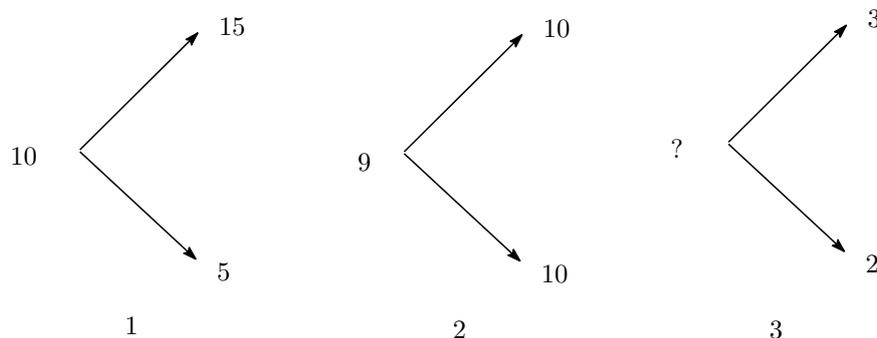
などをみると実務の雰囲気が分かる。とくに Wilmott の本を読むと理論が実務でどのように扱われているかがよく分かる。クオンツ志望者向けの本のようなのである。また Wilmott のウェブサイト (<http://www.wilmott.com/>) はクオンツ向けの話題が盛り沢山で面白い。

1 オプションの価格付け

1.1 無裁定価格理論

数理ファイナンスでは資産価格を**無裁定**という概念を用いて決定する。債券、株式、デリバティブ契約、(賃貸)不動産などの資産は利息や配当、家賃などのキャッシュフローを生む。費用を負担することなく、正の確率で利益をもたらす取引を**裁定取引**という。この裁定取引が行えないことを**無裁定**であるという。これからは無裁定であることを常に仮定する。裁定取引を行えないような価格を**無裁定価格**という。あるキャッシュフローを生む資産の価格を無裁定条件から決定するには、それと同じキャッシュフローを生む資産が市場でいくらで取引するかをみればよい。

例題 1.1 0 時点と 1 時点があり、1 時点における状態が 2 つある世界 (1 期間 2 項モデル) を考える。状態 1, 2 が実現する確率をそれぞれ p, q とおく ($p, q > 0, p + q = 1$)。この世界には最初 2 つの証券が存在する。証券 1 は状態 1 において 15、状態 2 において 5 という支払いを持ち (これを (15, 5) という支払いをもつ証券と表現する)、証券 2 はどちらの状態においても 10 という支払いを持つと仮定する。また、証券 1 の 0 期における価格は 10、証券 2 の価格は 9 であるとする。このとき、(3, 2) という支払いをもつ新たな証券 3 の価格はいくらにすればよいか。市場に (3, 2) という支払いをもつ証券があれば、その価格を証券 3 のそれとすればよ



いが、この市場には証券 1 と 2 しか存在しない。そこで、証券 1, 2 を組み合わせて証券 3 と同じ支払いを作ってみる。いま、証券 1 を x_1 単位、証券 2 を x_2 単位購入し、証券 3 と同じ支払いを作るには

$$x_1 \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たす x_1, x_2 を求めればよい。これは簡単に解くことができ、 $(x_1, x_2) = (1/10, 3/20)$ となる。この (x_1, x_2) を**複製ポートフォリオ**とよぶ。

さて、それでは証券 3 の価格はいくらになるだろうか。証券 1, 2 をそれぞれ $(x_1, x_2) = (1/10, 3/20)$ 単位購入すると証券 3 と同じ支払いになった。よって、無裁定条件より証券 3 の価格は

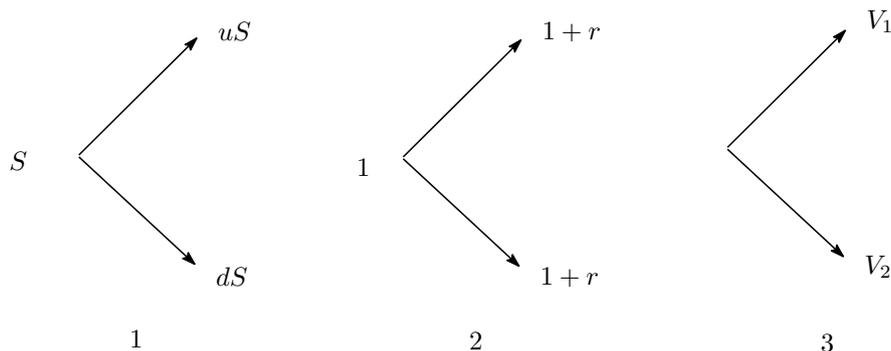
$$10x_1 + 9x_2 = 10 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{3}{20} = \frac{47}{20}$$

でなくてはならない。ここで、価格が状態 1 と状態 2 の実現確率 p, q に関係なく決まっていることに注意せよ。

つぎに、例題 1.1 を抽象的に議論する。証券 1 の支払いを (uS, dS) 、現在価格を S とし、証券 2 の支払いを $(1+r, 1+r)$ 、現在価格を 1 とする。この証券 2 のように、どの状態が実現しても投資資金が減らない資産を **安全資産** とよぶ。銀行預金や国債を想像すればよい。 r は利率または利回りにあたる。ここで、

$$0 < d < 1 + r < u \quad (1.1)$$

と仮定しておく。この市場において (V_1, V_2) という支払いをもつ証券 3 の価格 v を求めよう。証券 1, 2 をそれ



ぞれ x_1, x_2 単位購入することにより、証券 3 の支払いを複製する。

$$x_1 \begin{pmatrix} uS \\ dS \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1+r \\ 1+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

この連立方程式を解くと

$$x_1 = \frac{V_1 - V_2}{S(u-d)}, \quad x_2 = \frac{-dV_1 + uV_2}{(1+r)(u-d)}$$

となる。よって、証券 3 の価格 v は

$$v = x_1 S + x_2 = \frac{1+r-d}{u-d} \frac{V_1}{1+r} + \frac{-1-r+u}{u-d} \frac{V_2}{1+r} \quad (1.2)$$

となる。

さきほどの例と同じように、証券 3 の価格に確率 p, q は関係しない。ここで、(1.2) において、

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{-1-r+u}{u-d} \quad (1.3)$$

とおいてみよう。(1.1) より

$$0 < \tilde{p}, \tilde{q} < 1, \quad \tilde{p} + \tilde{q} = 1$$

が分かる。この確率 (\tilde{p}, \tilde{q}) のもとでの期待値作用素を $\tilde{E}[\cdot]$ と書くと、(1.2) は

$$v = \tilde{E} \left[\frac{V}{1+r} \right]$$

となる。ここで V は $P(V = V_1) = \tilde{p}$ 、 $P(V = V_2) = \tilde{q}$ となる確率変数。ここで確率 (\tilde{p}, \tilde{q}) のもとで証券 1 の支払い $(S_1$ とおく) の期待値を計算してみると

$$\tilde{E}[S_1] = \tilde{p}uS + \tilde{q}dS = (1+r)S$$

となる。すなわち、確率 (\tilde{p}, \tilde{q}) のもとでは証券1の期待収益率 $(\tilde{E}[(S_1 - S)/S])$ は証券2 (安全資産) の収益率 (利子率) r と等しくなる。また同じことだが、証券1の支払いを $1+r$ で割り引いたものの期待値は、証券1の現在価格に等しくなる $(\tilde{E}[S_1/(1+r)] = S)$ 。この確率 (\tilde{p}, \tilde{q}) を **リスク中立確率** とよぶ。

以上より、2項1期間モデルにおいて、ある証券の価格を求めるためには、複製ポートフォリオまたはリスク中立確率を求めればよいことが分かった。じつは、より一般的なモデルでも同様のことが成立する。ただし、モデルが**完備**でなくてはならない。

1.2 確率過程入門

前の項で扱った2項1期間モデルはあまりにも単純で、現実の世界の近似しているとはいえないであろう。図1.1のような関数をモデル化するために、**確率過程**を使う。

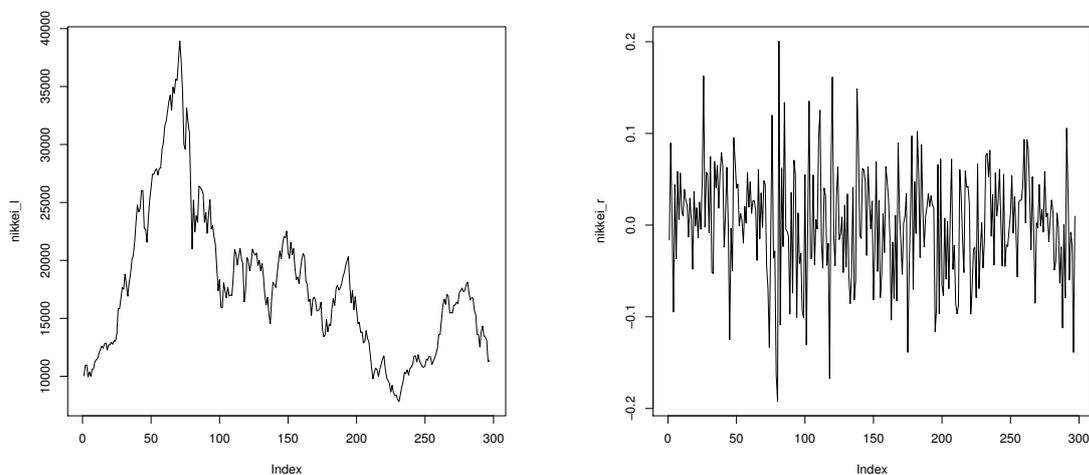


図 1.1 日経平均株価 (左) とその収益率 (右)

1.2.1 確率過程

(Ω, P, \mathcal{F}) を確率空間としたとき、適当な条件を満たす Ω 上の関数 $X(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) を確率変数とよんだ。例えば、サイコロを投げるとき出る目 X は確率変数である。 t を (時間) パラメータとしたときの、確率変数の族 $\{X(t, \omega)\}_{t \in T}$ を確率過程とよぶ。 T は実数の区間または整数の集合である。以下では T は実数の区間とする。確率過程の見方として、時刻 t ごとに確率変数 (ω の関数) $X(t, \omega)$ が決まるという見方と、 $\omega \in \Omega$ ごとに t の関数 $X(t, \omega)$ が決まるという見方がある。後者の見方をしたときの t の関数 $X(t, \omega)$ を X の**見本過程** (見本道, 見本関数, サンプルパス) とよぶ。

確率変数 X はその分布により決定されるが、確率過程 $\{X(t)\}$ は任意の $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対する $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ の同時分布によって決定される。

1.2.2 ブラウン運動

つぎの条件を満たす確率過程 $\{W(t)\}$ を **標準ブラウン運動** または **標準ウィナー過程** とよぶ。以下では、単にブラウン運動とよぶ。

- (1) $W(0) = 0$
- (2) $\{W(t)\}$ の見本過程が連続、すなわち $\omega \in \Omega$ を固定したとき、 $W(t, \omega)$ は t の関数として連続
- (3) $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対して、 n 個の確率変数

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

は独立 (独立増分性)

- (4) 任意の時刻 $s \leq t$ に対して、確率変数 $W(t) - W(s)$ は平均 0、分散 $t - s$ の正規分布にしたがう。

ただし、(1)~(4) の性質をみたす確率過程の存在は明らかではない。これらの性質を満たす確率過程の存在は Wiener によつてはじめて証明された。証明については前に挙げた参考文献を参照してほしい。ブラウン運動の見本過程は、いたるところで微分不可能であることが知られている。 $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ という形の確率過程を (μ, σ) -ブラウン運動とよぶ。確率過程 $X(t)$ が (μ, σ) -ブラウン運動にしたがうとき

$$X(t) \sim \text{BM}(\mu, \sigma^2) \quad (1.4)$$

と書くことにする。

また (μ, σ) -ブラウン運動からつくられる確率過程

$$S(t) = S \exp\{\mu t + \sigma W(t)\}, \quad S \text{ は定数}$$

を **幾何ブラウン運動** とよび、株価の価格変動モデルによく用いられる。 $S > 0$ ならば、幾何ブラウン運動は負の値をとらない。

1.2.3 確率微分方程式

つぎのような「微分方程式」を **確率微分方程式** という。

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad X(0) = x. \quad (1.5)$$

じつは (1.5) は形式的な表現で、確率過程 $\{X(t)\}$ が (1.5) を満たすとは

$$X(t) = x + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s) \quad (1.6)$$

を満たすことを意味する。右辺第 3 項目は **確率積分** とよばれるものである。

(1.5) で $\sigma \equiv 0$ とすると

$$dX(t) = \mu(X(t))dt, \quad X(0) = x$$

が得られる。これは常微分方程式

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mu(X(t)), \quad X(0) = x \quad (1.7)$$

のことである。例えば、 $\mu(X(t)) = \mu X(t)$ (μ は定数) のとき、この常微分方程式の解が

$$X(t) = xe^{\mu t}$$

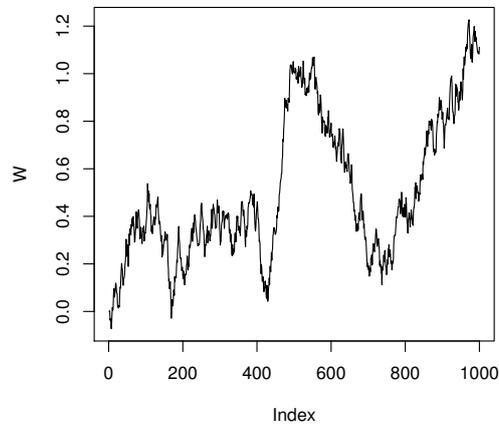


図 1.2 ブラウン運動の見本過程 1

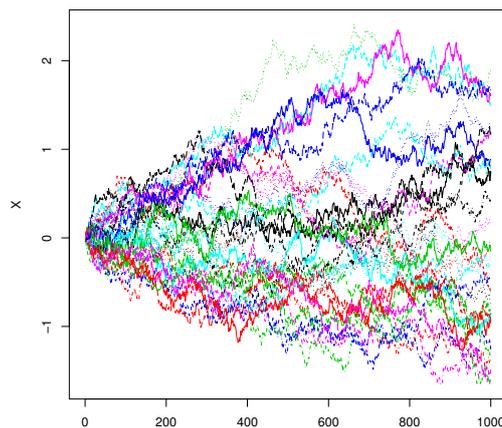


図 1.3 ブラウン運動の見本過程 2

であることはよいだろう。確率微分方程式 (1.5) は常微分方程式 (1.7) に「ノイズ」 $\sigma(X(t))dW(t)$ が加わったものと解釈することができる。

直感的には確率微分方程式 (1.5) をつぎのように解釈する。(1.5) の左辺 $dX(t)$ は微小時間における $X(t)$ の変化量とみればよく、 Δt を微小量としたとき、 $dX(t) \approx X(t + \Delta t) - X(t)$ と解釈する。右辺の $dW(t)$ も同様に解釈する。すると、確率微分方程式 (1.5) は X の微小時間における変化量が

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(X(t))\Delta t + \sigma(X(t))(W(t + \Delta t) - W(t)) \quad (1.8)$$

にしたがうことを記述しているとみることができよう。ブラウン運動の定義から $W(t + \Delta t) - W(t)$ は平均

0, 分散 Δt の正規分布にしたがうことに注意して, (1.8) 式を使うと, $X(0) = x$ から始めてつぎつぎと

$$\begin{aligned} X(\Delta t) &= X(0) + \mu(X(0))\Delta t + \sigma(X(0))\sqrt{\Delta t}Z_1 \\ X(2\Delta t) &= X(\Delta t) + \mu(X(\Delta t))\Delta t + \sigma(X(\Delta t))\sqrt{\Delta t}Z_2 \\ &\vdots \\ X(n\Delta t) &= X((n-1)\Delta t) + \mu(X((n-1)\Delta t))\Delta t + \sigma(X((n-1)\Delta t))\sqrt{\Delta t}Z_n \end{aligned} \quad (1.9)$$

のようにして, $X(\Delta t), X(2\Delta t), \dots, X(n\Delta t), \dots$ が求まる. ここで, Z_1, \dots, Z_n は互いに独立な標準正規分布にしたがう確率変数である. このようにしてできた $\{X(k\Delta t)\}$ ($k = 0, 1, \dots$) は確率微分方程式 (1.5) の解を近似することが知られている. よって, $X(0), X(\Delta t), X(2\Delta t), \dots$ をつないでできたグラフを $\{X(t)\}$ の見本過程の近似だとみなせば, (1.5) を満たす確率過程 $\{X(t)\}$ の振る舞いがイメージできるだろう.

いくつか例を挙げよう.

例題 1.2 $\mu(X(t)) \equiv 0, \sigma(X(t)) \equiv 1$ の場合, すなわち

$$dX(t) = dW(t)$$

となり, これはブラウン運動そのものである.

例題 1.3 $\mu(X(t)) \equiv \mu(\text{定数}), \sigma(X(t)) \equiv \sigma(\text{定数})$ の場合, すなわち

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.10)$$

となる. これは (μ, σ) -ブラウン運動である. $\sigma = 0$ だと, $X(t) = \mu t$ であり, それにノイズ $\sigma dW(t)$ が加わるので, 直線 μt の周辺をジグザグに動くような見本過程になる.

例題 1.4 $\mu(X(t)) = \mu X(t), \sigma(X(t)) = \sigma X(t)$ (μ, σ は定数) の場合,

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (1.11)$$

となる. これは対数正規過程または Black-Scholes (ブラック-ショールズ) モデルとよばれ, 株価変動のモデル化に使われるもっとも基本的な確率過程である. (1.11) を

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

と変形し, さらに

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \mu \Delta t + \sigma(W(t + \Delta t) - W(t))$$

と離散近似する. この左辺は $\{X(t)\}$ の瞬間的な収益率を表しているから, (1.11) は株価の瞬間的な収益率が正規分布 $N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ にしたがうことを意味する. じつは, (1.11) の解は

$$X(t) = x \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}$$

であるが, これを確認するには伊藤の公式を使わなければならない.

例題 1.5 その他, ファイナンスでよく使われる確率微分方程式に

$$dX(t) = \lambda(\bar{X} - X(t))dt + \sigma dW(t) \quad (\text{Ornstein-Uhlenbeck 過程}) \quad (1.12)$$

$$dX(t) = \lambda(\bar{X} - X(t)) + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t) \quad (\text{Feller 過程, 平方根過程}) \quad (1.13)$$

がある.

1.2.4 確率過程のシミュレーション

確率過程を直感的に理解するために, 確率微分方程式を満たす解の見本過程をモンテカルロ法によりシミュレーションしてみる^{*1}. (1.10) の解 $X(t)$ をシミュレーションしてみよう. (1.10) を離散近似すると

$$\begin{aligned} X((n+1)\Delta t) &= X(n\Delta t) + \mu\Delta t + \sigma(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\ &= X(n\Delta t) + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

となる. $[0, 1]$ 区間を N 分割すると, $\Delta t = 1/N$ となる. $X(n\Delta t) = X_n$ とおけば

$$X_{n+1} = X_n + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

という反復法を考えることになる. Z_1, \dots, Z_n は互いに独立な標準正規分布にしたがう確率変数.

R のコードはつぎのようになる. 実行結果は図 1.2.

```
Bmotion <- function(mu, sigma){
  T <- 1          #最終時刻
  N <- 250       #[0,T] 区間の分割数
  Delta <- 1/N   #1 区間の長さ
  X0 <- 0        #初期値

  X <- numeric(N) #X ベクトルの初期化
  X[1] <- X0

  for (i in 1:(N-1)){
    X[i+1] <- X[i] + mu*Delta + sigma*sqrt(Delta)*rnorm(1)
  }
  plot(X, type="l") #ベクトル X の折れ線グラフ
}
```

つぎのコードは関数 `matplot()` を使って, 複数の見本過程を一つの画面に描いている. 実行結果は図 1.3.

```
Bmotion2 <- function(mu, sigma){
```

^{*1}確率過程のシミュレーションについては後の授業で詳しく解説する.

```

T <- 1 #最終時刻
N <- 250 #[0,T] 区間の分割数
Delta <- 1/N #1 区間の長さ
Npath <- 30 #生成するパスの数
X0 <- 0 #初期値

X <- matrix(0, nrow = N, ncol =Npath) #X 行列の初期化

for (j in 1:Npath) {
  X[1,j] <- X0
  for (i in 1:(N-1)){
    X[i+1,j] <- X[i,j] + mu*Delta + sigma*sqrt(Delta)*rnorm(1)
  }
}
matplot(X, type="l") #ベクトル X の折れ線グラフ
}

```

1.2.5 伊藤の公式

伊藤の公式は合成関数の微分公式の確率過程版である。いま、 $x(t)$ を微分可能な実数値関数とする。微分可能な実数値関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考えると、合成関数の微分公式とは

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = f'(x(t))\frac{dx(t)}{dt}$$

のことであった。ある確率過程 $\{X(t)\}$ と実数値関数 $f(x)$ が与えられたとき、新しい確率過程 $\{f(X(t))\}$ の振る舞いを知りたい。つぎの**伊藤の公式**を用いるとそれを知ることができる。

伊藤の公式 (1) 確率過程 $\{X(t)\}$ がつぎの確率微分方程式を満たしているとする:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), X(0) = x.$$

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を十分滑らかとすると、確率過程 $\{f(X(t))\}$ は

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))(dX(t))^2 \\ &= \left[\mu(X(t))f'(X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t))f''(X(t)) \right] dt + \sigma(X(t))f'(X(t))dW(t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

を満たす。

式 (1.14) における、 $(dX(t))^2$ は形式的につぎのような演算だと理解することができる。まず、 $dW(t)$ と dt についてつぎの演算規則を定義する。

- (1) $dt \cdot dt = 0$
- (2) $dt \cdot dW(t) = 0$
- (3) $dW(t) \cdot dW(t) = dt$

これを使うと, $(dX(t))^2$ は

$$\begin{aligned}(dX(t))^2 &= [\mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)]^2 \\ &= \mu^2(X(t))(dt)^2 + 2\mu(X(t))\sigma(X(t))dt dW(t) + \sigma^2(X(t))(dW(t))^2 \\ &= \sigma^2(X(t))dt\end{aligned}\tag{1.15}$$

と計算できる.

伊藤の公式 (2) 確率過程 $\{X(t)\}$ と 2 変数関数 $f(t, x)$ が与えられたとき, 確率過程 $\{f(t, X(t))\}$ はつぎを満たす.

$$\begin{aligned}df(t, X(t)) &= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2 \\ &= \left[f_t(t, X(t)) + f_x(t, X(t))\mu(X(t)) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))\sigma^2(X(t)) \right] dt \\ &\quad + f_x(t, X(t))\sigma(X(t))dW(t).\end{aligned}\tag{1.16}$$

ここで, $f_t = \partial f / \partial t$, $f_x = \partial f / \partial x$, $f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2$ である.

テイラー展開から類推すると, (1.16) に $(dt)^2$ や $dt \cdot dX(t)$ の項があってもよさそうだが, 前に述べた演算規則によりこれらは全て 0 である.

例題 1.6 確率過程

$$Y(t) = y_0 \exp\{\mu t + \sigma W(t)\}$$

が満たす確率微分方程式を求めよう (μ, σ は定数). $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$, $f(x) = y_0 \exp(x)$ とおいて伊藤の公式を使うと

$$\begin{aligned}dY(t) &= df(X(t)) \\ &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))(dX(t))^2 \\ &= y_0 \exp(X(t))(\mu dt + \sigma dW(t)) + \frac{1}{2}y_0 \exp(X(t))(\mu dt + \sigma dW(t))^2 \\ &= Y(t) \left(\mu dt + \sigma dW(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \right) \\ &= Y(t) \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \right]\end{aligned}\tag{1.17}$$

となる. よって, $\{X(t)\}$ は

$$dY(t) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) Y(t)dt + \sigma Y(t)dW(t)$$

を満たす. これは幾何ブラウン運動である (例 1.4 参照).

1.3 オプション価格理論

現時点を 0, 将来のある時点を T とする. ある株式の価格が

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0 > 0\tag{1.18}$$

にしたがうと仮定する. $(\mu, \sigma$ は (推定すべき) 定数). 満期 T , 行使価格 K のヨーロッパコールオプションとは, 時点 T にこの株式を価格 K で購入する権利のことである. 満期におけるこのオプションの支払いは

$$(S(T) - K)^+$$

となる. ただし, $x^+ = \max\{0, x\}$ とする. 満期 T , 行使価格 K のヨーロッパプットオプションとは, 時点 T にこの株式を価格 K で売却する権利のことである. 満期におけるこのオプションの支払いは

$$(K - S(T))^+$$

である. 一般には関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$f(S(T))$$

を支払いとするオプション (デリバティブ) を考えることができる. また, 行使時点があらかじめ決められているオプションを一般にヨーロッパオプションとよぶ.

1.3.1 偏微分方程式アプローチ

いま, 市場に株価が (1.18) にしたがう株式と,

$$dB(t) = rB(t)dt, B(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B(t) = e^{rt} \quad (r \geq 0)$$

という価格過程にしたがう安全資産が存在するとする. 第 1.1 節でみたように, ある資産の価格を求めるには, その資産と同じ支払いを持つポートフォリオを作り, そのポートフォリオの現在価格をその資産の価格とすればよかった. ヨーロッパコールオプションの場合, 時点 T において $(S(T) - K)^+$ の支払いをもつポートフォリオを構成すればよい.

株式を $\phi(t)$ 単位, 安全資産を $\eta(t)$ 単位購入するポートフォリオの価値を $V(t)$ とすると

$$V(t) = \phi(t)S(t) + \eta(t)B(t) \tag{1.19}$$

となる. この場合, $\phi(t), \eta(t)$ は確率過程になることに注意. ここで, 資金自己調達 (self-financing) の仮定のもとで $V(t)$ は

$$dV(t) = \phi(t)dS(t) + \eta(t)dB(t) = [\mu\phi(t)S(t) + r\eta(t)B(t)]dt + \sigma\phi(t)S(t)dW(t) \tag{1.20}$$

を満たす. ここで, $V(T) = (S(T) - K)^+$ となる ϕ, η を見つければよいが, この条件だけではまだ見つからない.

つぎに, このコールオプションの時刻 $t \in [0, T]$ における価格を $C(t)$ とする. 当然, $C(T) = (S(T) - K)^+$ である. このコールオプション価格 $C(t)$ がしたがう確率過程を確率微分方程式で記述する. いま, ある 2 変数関数 f が存在して, $C(t) = f(t, S(t))$ と書けると仮定する. すると, 伊藤の公式から

$$\begin{aligned} df(t, S(t)) &= f_t(t, S(t))dt + f_s(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f_{ss}(t, S(t))(dS(t))^2 \\ &= \left[f_t(t, S(t)) + \mu S(t)f_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) \right] dt \\ &\quad + \sigma f_s(t, S(t))S(t)dW(t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

となる.

$V(T) = (S(T) - K)^+ (= C(T))$ となる (ϕ, η) を見つけたかった。これが成り立つときは、無裁定条件より

$$V(t) = C(t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.22)$$

が成立しなければならない。よって、(1.22) を満たす (ϕ, η) を求めることを考える。(1.21) と (1.20) が等しければ

$$\mu\phi(t)S(t) + r\eta(t)B(t) = f_t(t, S(t)) + \mu S(t)f_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) \quad (1.23)$$

$$\sigma\phi(t) = \sigma f_s(t, S(t)) \quad (1.24)$$

が成り立つ。(1.19), (1.23), (1.24) から、 ϕ, η, f が満たすべき関係式を求めると

$$\phi(t) = f_s(t, S(t)) \quad (1.25)$$

$$\eta(t) = \frac{f(t, S(t)) - f_s(t, S(t))S(t)}{B(t)} \quad (1.26)$$

$$f_t(t, S(t)) + rS(t)f_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) - rf(t, S(t)) = 0 \quad (1.27)$$

となる。よって、偏微分方程式

$$f_t(t, s) + rsf_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 f_{ss}(t, s) - rf(t, s) = 0, \quad f(T, s) = (s - K)^+, \quad s > 0 \quad (1.28)$$

を解けば、コールオプションの価格過程 $\{f(t, S(t))\}$ と複製ポートフォリオ (ϕ, η) が求まり、 $V(0) = C(0) = f(0, S_0)$ がこのコールオプションの現在価値となる。プットオプションの場合は、(1.28) の境界条件が変わるだけである。

偏微分方程式 (1.28) の解は

$$f(t, s) = sN(d_+(T-t, s)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-(T-t, s)) \quad (1.29)$$

となることが知られている。ここで、 N は標準正規分布の分布関数で、

$$d_{\pm}(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right]. \quad (1.30)$$

よって、コールオプションの現在価格は

$$f(0, S_0) = S_0N(d_+(T, S_0)) - Ke^{-rT}N(d_-(T, S_0))$$

(1.30) を R の関数にするとつぎのようになる。

```
BScall <- function(r, sigma, T, K, S0){
```

```
  #r: 利子率
```

```
  #sigma: ボラティリティ
```

```
  #t: 現在時刻
```

```
  #T: 満期
```

```
  #K: 行使価格
```

```
  #S0: 現在の株価
```

```

dplus <- 1/(sigma*sqrt(T))*(log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)
dminus <- 1/(sigma*sqrt(T))*(log(S0/K)+(r-0.5*sigma^2)*T)

price <- S0*pnorm(dplus) - K*exp(-r*T)*pnorm(dminus)

return(price)
}

```

例えば, $r = 0.1, S_0 = 62, K = 60, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月のときのコールオプションの現在価格は

```

> BScall(0.1,0.2,5/12,60,62)
[1] 5.797781
>

```

となる.

1.3.2 マルチンゲールアプローチ

1.1 節の議論において, ある資産の価格はその資産が生む (不確実な) キャッシュフローを安全資産で割り引いたものの, リスク中立確率のもとでの期待値を取ったものであった. じつは, 連続モデルでも同様のことが言える.

ヨーロッパコールオプションの支払いは時点 T において $(S(T) - K)^+$ であるから, これを安全資産で割り引き, リスク中立確率で期待値を取ったもの, すなわち

$$C(0) = E^Q [e^{-rT}(S(T) - K)^+] \quad (1.31)$$

が現在価格となる. ここで, $E^Q[\cdot]$ はリスク中立確率 Q のもとでの期待値作用素である. リスク中立確率については何も説明していないが, じつはリスク中立確率のもとで, 株価過程 $\{S(t)\}$ は

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t), \quad S(0) = S_0 > 0 \quad (1.32)$$

にしたがう. ここで, $\{W^Q(t)\}$ はリスク中立確率 Q のもとでのブラウン運動である. (1.18) との違いは $S(t)dt$ の係数 (瞬間的な収益率) が r になってる点と, ブラウン運動 $\{W(t)\}$ が別のブラウン運動に置き換わっている点である. これを認めると $\{S(T)\}$ は対数正規分布にしたがう確率変数だから (1.31) の期待値が計算できる. この講義では, 議論を (1.32) 式, つまり「リスク中立確率のもとで株価過程が~にしたがう」というところから始めるので, どのようにリスク中立確率が求められるか分からなくても差し支えない. ちなみに, リスク中立確率を求めるには, **Girsanov-丸山の定理**, **Radon-Nikodým の定理**などが必要になる. また, 時刻 $0 \leq t < T$ におけるオプションの価格 $C(t)$ は

$$C(t, x) = e^{-r(T-t)} E^Q [(S(T) - K)^+ | S(t) = x]$$

となる. この $C(t, x)$ が (1.28) を満たすことは **Feynman-Kac の公式**を使うと示すことができる.

一般に T 時点までの情報で支払い額が確定する支払い F の価格, たとえば $F = f(S(T))$ や $F = g(\{S(t)\}_{0 \leq t \leq T})$ の価格は

$$E^Q [e^{-rT} F]$$

で求めることができる. また, 複製ポートフォリオは**マルチンゲールの表現定理**を用いると求められる.

1.3.3 配当がある場合

株価過程 (1.18) は配当の支払いを考慮していない。現実には1年または半年に1度、配当が支払われる株式が多い。そして、配当が支払われた後は、配当の分だけ株価が下落する（配当落ち）。配当が支払われると株価が下落するということは、配当がどのくらい支払われるかによって、オプション価格が変わることを意味する。いま、現実の近似として株式は配当率 δ で連続的に配当されると仮定する。すると、株価過程は配当落ちを考慮して

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) - \delta S(t)dt \\ &= (\mu - \delta)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

となる。

オプションの価格付けは 1.3.1 項の議論において、資金自己調達の仮定から出てくる式 (1.20) がつぎのようになる。

$$dV(t) = \phi(t)dS(t) + \eta(t)dB(t) + \phi(t)\delta S(t)dt = [\mu\phi(t)S(t) + r\eta(t)B(t)]dt + \sigma\phi(t)S(t)dW(t). \quad (1.34)$$

すなわち、結果だけを見れば (1.20) と変わらない。また、オプション価格 $C(t) = f(t, S(t))$ がしたがう確率微分方程式は

$$\begin{aligned} df(t, S(t)) &= \left[f_t(t, S(t)) + (\mu - \delta)S(t)f_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) \right] dt \\ &\quad + \sigma f_s(t, S(t))S(t)dW(t) \end{aligned} \quad (1.35)$$

結果、導かれる偏微分方程式は

$$f_t(t, s) + (r - \delta)sf_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 f_{ss}(t, s) - rf(t, s) = 0, \quad f(T, s) = (s - K)^+, \quad s > 0 \quad (1.36)$$

となる。配当がない場合との違いは sf_s の係数が $r - \delta$ となったところだけである。この偏微分方程式を解くと

$$f(t, s) = se^{-\delta(T-t)}N(d_+(T-t, s)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-(T-t, s)) \quad (1.37)$$

となる。ここで、

$$d_{\pm}(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r - \delta \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right]. \quad (1.38)$$

また、リスク中立確率のもとでは株価過程 $\{S(t)\}$ は

$$dS(t) = (r - \delta)S(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t), \quad S(0) = S_0 > 0$$

となり、支払いが $f(S(T))$ のオプションの価格は

$$E^Q[e^{-rT}f(S(T))] \quad (1.39)$$

となる。

よって、配当があってもなくても数値計算法の本質的な部分は変わらない。以後は特に断りがない限り配当は考えない。

1.4 通貨オプション

ある（外国の）通貨を売買する権利を通貨オプション（為替オプション）とよぶ。いま、為替レート $S(t)$ が株価過程と同様に幾何ブラウン運動

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = s_0 > 0$$

にしたがうとする。 $S(t)$ は外国通貨 1 単位を本国通貨に交換したときの価値を表す。本国の安全資産 $B^d(t)$ が

$$dB^d(t) = r^d B^d(t)dt, \quad B^d(0) = 1$$

にしたがうとする。 r^d は本国の安全資産の収益率（金利）を表す。このとき、為替レート $S(t)$ に関するコールオプション $(S(T) - K)^+$ を価格を求めたい。そうすると、これまでの議論と同様にしてオプション価格を求められるような気がするが、為替レート $S(t)$ 自体は取引ができないことが問題となる。そこで、外国における安全資産 $B^f(t)$ を取引することを考える。この安全資産の本国通貨での価値は $S(t)B^f(t)$ となる。また、 $B^f(t)$ は本国安全資産と同じように

$$dB^f(t) = r^f B^f(t)dt, \quad B^f(0) = 1$$

にしたがうとする。 r^f は外国の安全資産の収益率（金利）を表す。

$B^f(t)$ を $\phi(t)$ 単位、 $B^d(t)$ を $\eta(t)$ 単位購入するポートフォリオの本国通貨での価値

$$V(t) = \phi(t)S(t)B^f(t) + \eta(t)B^d(t)$$

を考えて、あとは株式オプションと同様にすれば、

$$f_t(t, s) + (r^d - r^f)sf_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 f_{ss}(t, s) - r^d f(t, s) = 0, \quad f(T, s) = (s - K)^+, \quad s > 0 \quad (1.40)$$

となる。株式との違いは sf_s の係数が $r^d - r^f$ となったところだけである。この偏微分方程式を解くと

$$f(t, s) = se^{-r^f(T-t)}N(d_+(T-t, s)) - Ke^{-r^d(T-t)}N(d_-(T-t, s))$$

となる。ここで、

$$d_{\pm}(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r^d - r^f \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right].$$

また、リスク中立確率のもとでは為替レート $\{S(t)\}$ は

$$dS(t) = (r^d - r^f)S(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t), \quad S(0) = S_0 > 0$$

となる。配当がある場合の株式と似ていることが分かるだろう。よって、支払いが $f(S(T))$ のオプションの価格は

$$E^Q[e^{-r^d T} f(S(T))] \quad (1.41)$$

となる。

よって、為替オプションの場合も数値計算の本質的な部分は、配当がない株式の場合のそれと同じであることが分かるだろう。

1.5 計算ファイナンスの目的

1.5.1 アメリカンオプション

あらかじめ決められた時点 T でのみ行使ができるオプションをヨーロピアンオプションと呼んだ。一方、オプションの買い手が行使時点を自分で選べるオプションを**アメリカンオプション**とよぶ。行使時点は停止時刻とよばれる概念で定義する。任意の $t > 0$ に対して、確率変数 τ に関する事象

$$\{\tau < t\}$$

が成り立っているかどうかを t 時点までの情報で判断できるとき、 τ を**停止時刻**とよぶ。直感的には、停止時刻 τ は繰り返し行われる賭けを止める規則のようなものである。ただし、賭けを止めるかどうかは現時点までの情報（現時点までの賭けの結果）によって決めなければならない。ある時点までの賭けの結果はランダムなので停止時刻もランダムである。

いま t 時点におけるオプションの支払いを $f(S(t))$ とし、停止時刻 τ^* を所与とする。するとオプションの支払いは $f(S(\tau^*))$ となり、 $f(S(\tau^*))$ は満期時点までの情報で支払い額が確定するので、マルチンゲールアプローチによればその価格は

$$E \left[e^{-r\tau^*} f(S(\tau^*)) \right]$$

となる。実際には τ^* は所与ではなく、オプションの買い手は自分にとってもっとも有利な τ^* を選ぶだろうから、オプションの価格は

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E \left[e^{-r\tau} f(S(\tau)) \right] \quad (1.42)$$

としなければならない。ここで $\mathcal{T}_{0,T}$ は $[0, T]$ に値をとる停止時刻の集合を表す。(1.42)の問題を最適停止問題といい、その解を最適停止時刻とよぶ。

じつは一般にはアメリカンオプションの価格 (1.42) の解析的な表現は見つかっていない。一番単純だと思われる Black-Scholes モデルにおけるアメリカンプットオプションにさえ解析的な解は見つかっていない*2。よって、アメリカンオプションの価格を求めるには何らかの数値計算が必ず必要になる。

1.5.2 エキゾチックオプション

ここで紹介したコール・プットオプション以外にも、さまざまな支払いをもつオプションが存在する。たとえば、

$$f \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \right), f \left(\max_{0 \leq t \leq T} S(t) \right), f(S(T)) I \left\{ \max_{0 \leq t \leq T} S(t) < B \right\} \quad (1.43)$$

がある。 f は支払い関数、 I は定義関数を表す。順に、アジア型オプション、ルックバックオプション、バリアオプションとよばれる。標準的なオプション以外のオプションをまとめてエキゾチックオプションとよぶことがある。エキゾチックオプションには陽的な価格公式が知られていないものが多い。

*2アメリカンコールオプションは満期時点で行使することが最適であることが知られている。すなわち、アメリカンコールオプションの価格はヨーロピアンコールオプションの価格に等しい。ただし配当がない場合に限る。

1.5.3 株価変動モデルの拡張

Black-Scholes モデルは実際の株価の動きとはあまり整合的ではない。とくにボラティリティ項が一定という仮定は正しくない。よって、Black-Scholes モデルを拡張し、より現実にあうモデルを構築することが必要になる。たとえば確率的ボラティリティモデル (Heston モデル)

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{Y(t)}S(t)dW_1(t) \\ dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta\sqrt{Y(t)}dW_2(t) \\ dW_1(t) \cdot dW_2(t) = \rho dt, \quad -1 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

がある。しかし、拡張モデルを使うと必ずしも陽的な価格公式が得られるとは限らない。

1.6 数値計算手法の種類

ファイナンスで用いられる数値計算手法は主に 3 つに分類される。

- (1) ツリーモデル (Tree models)
- (2) 有限差分法 (Finite-difference methods)
- (3) モンテカルロ法 (Monte Carlo methods)

ただし (1) と (2) は本質的には同じ手法である。ツリーモデルは原資産価格過程をツリーを使って離散近似する手法である。有限差分法は偏微分方程式を離散近似して解を求める手法である。モンテカルロ法は確率過程の振る舞いを乱数を用いてシミュレーションすることにより、期待値などを近似する手法である。問題の性質により適した手法を選ぶ必要がある。大まかに言えばつぎのようにまとめられる。

問題	Tree & FD	MC
低次元	○	△
高次元	×	○
パス依存	△	○
アメリカン	○	△
リスク指標	○	△

2 ツリーモデル

2.1 2項ツリーモデル (CRR モデル)

Cox-Ross-Rubinstein (“Option Pricing: A Simplified Approach”, J.Financial Economics, 7(1979) 229-263) による 2 項ツリーの構成方法を説明する。まずは、モデルとなっている確率過程

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2.1)$$

を近似する 2 項ツリーを構成する。具体的には、図 2.1 における u, d, p をいかに (2.1) に整合するように選ぶかが問題となる。

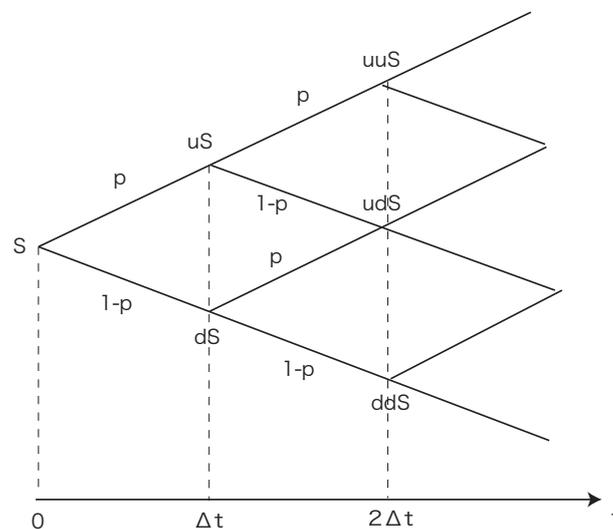


図 2.1 2項モデル

モデルを整理しておこう。Black-Scholes モデルを考える。

$$\begin{aligned} \text{安全資産: } dB(t) &= rB(t)dt, B(0) = 1 (B(t) = e^{rt}) \\ \text{リスク中立的株価過程: } dS(t) &= rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), S(0) = S_0 \\ \text{満期までの時間: } T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

まずヨーロッパンコールオプション $(S(T) - K)^+$ の価格を求めることにする。この価格は

$$E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$$

によって求めることができた。このオプション価格を 2 項ツリー近似により求めるため^{*3}、まず時間空間 $[0, T]$ を N 等分し、 $\Delta t := T/N$ 、 $t_i = i\Delta t$ ($i = 0, 1, \dots, N$) とする。つぎに t_0, t_1, \dots, t_N を時間パラメータ

^{*3}念のため注意しておくが、Black-Scholes モデルにおいてはヨーロッパンコールオプションの解析解が分かっているのでツリー近似により価格を求める必要はない。しかし、いまはツリーモデルの概要を説明するため、あえて解析解が分かっている場合を取り上げている。

とする確率過程 $\tilde{S}(t_0), \tilde{S}(t_1), \dots, \tilde{S}(t_N)$ を

$$\tilde{S}(t_{i+1}) = D_{i+1}\tilde{S}(t_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (2.3)$$

により定義する. ここで D_i は互いに独立な確率変数でその分布は

$$P(D_i = u) = p, \quad P(D_i = d) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

であるとする. 表記の簡単を簡単にするため $S_i = \tilde{S}(t_i)$ と定義する. よって S_i ($i \geq 1$) は

$$S_i = \prod_{j=1}^i D_j S_0,$$

と書ける. S_i が取りうる値は

$$u^k d^{i-j} S_0, \quad j = 0, \dots, i$$

であり,

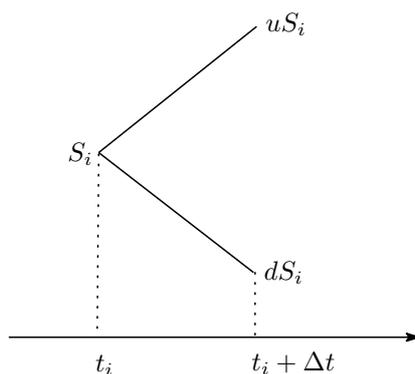
$$P(S_i = u^j d^{i-j} S_0) = \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}$$

である. この $\{S_i\}_{i=0,1,\dots,N}$ が (2.2) を近似するようにパラメータ u, d, p を決定すればよい.

確率微分方程式 (2.2) より

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma (W(t + \Delta t) - W(t)) \right\} \quad (2.4)$$

が得られる. よって, $W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t)$ に注意すると $S(t)$ が与えられたもとでの $S(t + \Delta t)$ の条件付き分布は対数正規分布となることが分かる. よって, ツリーモデルにおける各ノードでの条件付き分布が, (2.4) の対数正規分布の近似になるように u, d, p を決めればよい. (2.4) とツリーの条件付き期待値と条件付き分散がそれぞれ一致するように u, d, p を決める.



2項モデルにおいて, 時刻 t_i での株価 S_i が s であるという条件のもとでの S_{i+1} の期待値は

$$E[S_{i+1} | S_i = s] = pus + (1-p)ds \quad (2.5)$$

となる. 一方, (2.1) において, $S(t_i) = s$ という条件のもとでの $S(t_i + \Delta t)$ の期待値は

$$E[S(t_i + \Delta t) | S(t_i) = s] = sE \left[\exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma (W(t_i + \Delta t) - W(t_i)) \right\} \right] = se^{r\Delta t}. \quad (2.6)$$

となる*4. よって, (2.5) と (2.6) より

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \Leftrightarrow p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (2.7)$$

となる. これは (1.3) と本質的に同じ式である. つぎに分散を合わせる. 2項モデルの条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[S_{i+1}|S_i = s] &= E[S_{i+1}^2|S_i = s] - (E[S_{i+1}|S_i = s])^2 \\ &= p(us)^2 + (1-p)(ds)^2 - (pus + (1-p)ds)^2 \\ &= s^2(pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2) \\ &= s^2(pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}) \end{aligned}$$

である. 一方, (2.1) の条件付き分散は

$$V[S(t_i + \Delta t)|S_i = s] = s^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) \quad (2.8)$$

となる. よって,

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t} = e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) \Leftrightarrow e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2 \quad (2.9)$$

が成り立つ.

u, d, p を決定するには, (2.7) と (2.9) のほかにもう一つ式が必要となる. どのような式を課すかにはある程度自由度がある. ここでは, CRR のアプローチに従って,

$$ud = 1 \quad (2.10)$$

という式を課すことにする. (2.7) を (2.9) に代入して

$$\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} u^2 + \left(1 - \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\right) d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \Leftrightarrow e^{r\Delta t}(u + d) - ud = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \quad (2.11)$$

となる. 最後の式に $u = 1/d$ を代入して d を消去すると

$$u^2 - (e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t})u + 1 = 0$$

となり, これを解いて $u > d$ に気をつければ

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$$

*4 対数正規分布の期待値と分散はつぎのように与えられる. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, e^Z の期待値は

$$E[e^Z] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

となる. 分散は

$$E[(e^Z)^2] = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$$

より,

$$V[e^Z] = E[(e^Z)^2] - (E[e^Z])^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

となる。ここで、 $\beta = (e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t})/2$ である。あとは、 d, p を (2.7) と (2.10) から求めればよい。まとめるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} u &= \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \\ d &= \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \\ \beta &= \frac{e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}}{2}. \end{aligned}$$

この u, d をそのまま使ってもよいが、実際には

$$u' = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d' = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

が使われることが多い。 Δt が十分 0 に近いとき、 u', d' が (2.7), (2.9), (2.10) を満たすことを示せる*5。

また、(2.10) の代わりに

$$p = \frac{1}{2} \tag{2.12}$$

という条件を課すこともある。(2.7), (2.9), (2.12) を解いて、 u, d を求めると、

$$\begin{aligned} u &= e^{r\Delta t} \left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} \right) \\ d &= e^{r\Delta t} \left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} \right) \end{aligned}$$

となる。 Δt が十分 0 に近いとき

$$u \approx e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d \approx e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}},$$

となり、この値を実装に用いることが多い。

つぎにオプションの価格を求める。例としてヨーロピアンコールオプションを考えよう。ヨーロピアンオプションの場合、満期 T における支払いを無リスク金利で現在に割り引いたものの (リスク中立確率のもとの) 期待値を取ればよかった。まず、 t_i 時点における j 回 ($j \leq i$) 株価が上昇したノード (これを (i, j) ノードとよぶ) におけるオプションの価格を $C_{i,j}$ とおく。設定によりノード (i, j) における株価は $S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}$ である。すると、満期における支払いは

$$C_{N,j} = (S_{N,j} - K)^+, \quad j = 0, 1, \dots, N \tag{2.13}$$

となる。よって、オプションの価格は

$$\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} e^{-rT} (S_{N,j} - K)^+ \tag{2.14}$$

によって求めることができる。

*5たとえば、つぎのように示せる。 $u' \approx 1 + \sigma\sqrt{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$, $d' \approx 1 - \sigma\sqrt{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$, $e^{r\Delta t} \approx 1 + r\Delta t$ などとして、(2.11) の左辺に代入し、 Δt より大きい次数をもつ項を無視すると

$$e^{r\Delta t}(u + d) - ud \approx (1 + r\Delta t)(2 + \sigma^2\Delta t) - 1 \approx 1 + 2r\Delta t + \sigma^2\Delta t$$

となる。(2.11) の右辺が $e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \approx 1 + 2r\Delta t + \sigma^2\Delta t$ であるから、示せたことになる。

またつぎのように求めることもできる。(5.15) から始めて, $i \leq N-1$ 時点におけるオプションの価格を

$$C_{i,j} = e^{-r\Delta t}(pC_{i+1,j+1} + (1-p)C_{i+1,j}), \quad i = N-1, N-2, \dots, 0, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

と後ろ向きにつぎつぎと計算していく. $C_{0,0}$ が求めたいオプション価格になる*6.

このアルゴリズムをまとめると次のようになる.

- (1) 適切に決定した u, d, p を使って, 株価のツリーを構築する. (i, j) ノードにおける株価 $S_{i,j}$ は

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}$$

である.

- (2) 満期時点におけるオプションの価値を計算する. コールオプションの場合

$$C_{N,j} = (S_{N,j} - K)^+, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

とする.

- (3) オプションの価格を (5.16) によって計算する. またはオプションの価格を後ろ向きに計算する. つまり

$$C_{i,j} = e^{-r\Delta t}(pC_{i+1,j+1} + (1-p)C_{i+1,j}),$$

とすることによって, リスク中立確率のもとでの期待値を各ノードで計算する. $C_{0,0}$ が求めたいオプション価格になる.

R のサンプルコード. 2 項モデルによるヨーロッパンコールオプションの価格.

```
CRREcall <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  S <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #株価行列の初期化
  C <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #オプション価格行列の初期化

  delta <- T/N #時間間隔

  u <- exp(sigma*sqrt(delta)) #上昇の大きさ
  d <- exp(-sigma*sqrt(delta)) #下降の大きさ
  p <- (exp(r*delta) - d)/(u - d) #リスク中立確率

#----- 株価ツリーの構築 -----
  for (i in 0:N){
    for (j in 0:i){
      S[i+1,j+1] <- S0*u^j*d^(i-j)
    }
  }
}
```

*6R で実装する場合, 添字が 1 から始まることに注意.

```

#-----満期におけるオプションの支払いの計算 -----
  for (j in 0:N){
    C[N+1, j+1] <- max(S[N+1, j+1] - K, 0)  #コールオプション
  }

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
  for (i in N:1) {
    for (j in 1:i) {
      C[i, j] <- exp(-r*delta)*(p*C[i+1, j+1] + (1-p)*C[i+1, j])
    }
  }
  return(C[1, 1])  #オプション価格を返す
}

```

ヨーロピアンコール (プット) オプションの評価には、株価のツリーを構築する必要はなく、満期時点の株価さえ生成しておけばよい。実際、このコードで $S[i, j]$ ($i \leq N$) はオプションの評価に使われていない。

$r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $S_0 = 62, K = 60, N = 300$ のときの値

```
> CRREcall(0.1, 0.2, 5/12, 60, 62, 300)
```

```
[1] 5.79819
```

```
>
```

2.2 アメリカンオプション

いま原資産がしたがう確率過程を (2.3) としたとき、オプションの支払い関数をとすると $h(x)$ *7, アメリカンオプションの価格 V_0 は

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, N}} E[e^{-r\tau} h(S_\tau)]$$

によって与えられる。ここで $\mathcal{T}_{0, N}$ は $\{0, \dots, N\}$ に値をとる ($\{S_1, \dots, S_N\}$ に対する) 停止時刻の集合を表す。このとき

$$V_i(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{i, N}} E[e^{-r(\tau - t_i)} h(S_\tau) | S_i = x]$$

とすると、最適停止時刻 τ^* は

$$\tau^* = \min\{i \in \{0, \dots, N\} | V_i(S_i) \leq h(S_i)\}$$

で特徴づけられる。さらに $V_i(x)$ はつぎのような動的計画方程式を満たすことが知られている。

$$V_i(x) = \max\{h(x), E[e^{-r\Delta t} V_{i+1}(D_{i+1}x)]\}. \quad (2.15)$$

証明にはマルコフ性とマルチンゲールの性質を用いる。ここで $E[e^{-r\Delta t} V_{i+1}(D_{i+1}x)]$ は i 時点においてオプションを行使しなかった場合に得られる価値を表すため、**継続価値**とよぶ。よって、(2.15) を後ろ向きに解く

*7行使価格が K のコールオプションは $h(x) = (x - K)^+$, プットオプションは $h(x) = (K - x)^+$.

ことによりオプション価値 $V_0(S_0)$ を得ることができると分かる。2項モデルにおいては

$$V_{i,j} = \max \{h(S_{i,j}), e^{-r\Delta t}(pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j})\}$$

とすればよい。

Rのサンプルコード。2項モデルによるアメリカンプットオプションの価格。

```
CRRApout <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  S <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #株価行列の初期化
  V <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #オプション価格行列の初期化

  delta <- T/N #時間間隔

  u <- exp(sigma*sqrt(delta)) #上昇の大きさ
  d <- exp(-sigma*sqrt(delta)) #下降の大きさ
  p <- (exp(r*delta) - d)/(u - d) #リスク中立確率

#----- 株価ツリーの構築 -----

  for (i in 0:N){
    for (j in 0:i){
      S[i+1,j+1] <- S0*u^j*d^(i-j)
    }
  }

#-----満期におけるオプションの支払いの計算 -----

  for (j in 0:N){
    V[N+1, j+1] <- max(K-S[N+1,j+1], 0) #プットオプション
  }

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----

  for (i in N:1) {
    for (j in 1:i) {
      V[i,j] <- max(K-S[i,j], exp(-r*delta)*(p*V[i+1,j+1] + (1-p)*V[i+1,j]))
      #アメリカンオプション
    }
  }
  return(V[1,1])
}
```

}

$r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $S_0 = 62, K = 60, N = 100$ のときの値

```
> CRRApout(0.1, 0.2, 5/12, 60, 62, 100)
```

```
[1] 1.504253
```

```
>
```

2.3 2項モデルの収束性など

収束の速さについて簡単に述べておこう。いま、満期までの時間を N 分割したとする。このとき、CRR モデルによって得られたヨーロッパコールオプションの価格を $C(N)$ とし、Black-Scholes 式から得られる解析解を C_{BS} とすると

$$|C(N) - C_{BS}| = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

であることが知られている。これを $1/N$ の次数で収束するとよぶ。また、アメリカンプットオプションに関しても $1/N$ の次数で収束することが知られている。2項モデルの収束に関する議論については

- L-B. Chang and K. Palmer, “Smooth convergence in the binomial model”, Finance and Stochastics (2007) 11, 91-105
- M. S. Joshi, “Achieving higher order convergence for the prices of European options in binomial trees”, Mathematical Finance (2010) 20, 89-103

やそこにある参考文献を参照せよ。

$N \rightarrow \infty$ のとき $C(N) \rightarrow C_{BS}$ となる様子を描いたグラフが図 2.2 である。また図 2.3 は誤差が 0 に近づく様子を描いたものである。このグラフから分かるように $C(N)$ は振動しながら真の解へ近づく。振動の原因はツリーにおける行使価格 K の位置にある。この収束の振動を解消する方法については次節を参照せよ。また、3項モデルを採用すると収束がもう少しなめらかになる。

バリアオプションの実装もできるが、行使価格の位置に加えてバリアの位置による振動収束の問題も生じる。ノードが再結合するツリーモデルでは経路依存性を表現できないので、アジアンオプションなどの経路依存型オプションの価格付けは難しい。何らかの工夫をすることで価格付けをしようという試みもある。Clewlow and Strickland や Hull の本を参照せよ。

2.4 振動収束の解消方法

Y. S. Tian, “A flexible binomial option pricing model” The Journal of Futures Markets, 19(1999), 817-843 に基づいて 2項モデルにおける収束の振動を解消する方法を説明する。2項モデルのパラメータ u, d, p を上手く決めて、行使価格 K が満期においていずれかのノードと重なるようにする。そのためには CRR の方法を少し拡張する必要がある。Tian は u, d をつぎのように与えた。

$$u' = e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}, d' = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}.$$

ここで λ は新たに導入されたパラメータ。 Δt が 0 に近ければ、この u', d' は CRR によって与えられた $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ に近いことが分かる。このパラメータ λ を上手く設定して、 K が満期において、あ

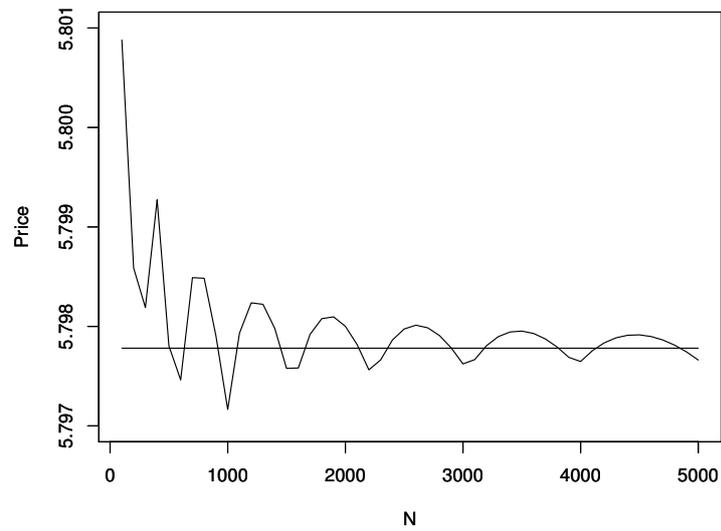
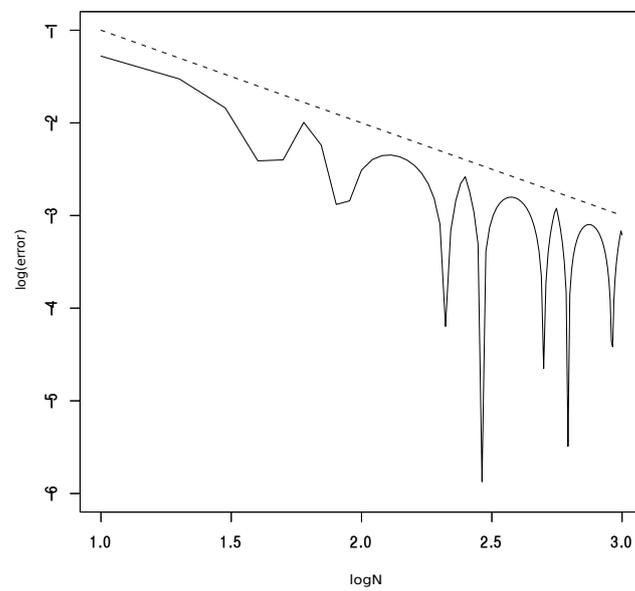


図 2.2 解析解への収束の様子

図 2.3 誤差 (error) が小さくなる様子. 実線は \log_{10} (誤差), 点線は傾きが -1 の直線.

るノード上に乗るようにする。ただし、 λ は何でもよいわけではなく、モデルに矛盾を起こさないように選ぶ必要がある。この場合、上昇確率が

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d'}{u' - d'}$$

で与えられるが、これは $0 < p < 1$, すなわち $d' < e^{r\Delta t} < u'$ を満たさなくてはならない。簡単な計算により、この不等式は

$$\left| \lambda - \frac{r}{\sigma^2} \right| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (2.16)$$

となることが分かる*8。 λ はこの不等式を満たすように選ばなくてはならない。

λ はつぎのように決定する。

- (1) まず CRR モデル ($\lambda = 0$ のとき) を考え、満期において行使価格 K と一番近いノードを探す。CRR モデルでは、満期における株価は $S_{N,j} = S_0 u^j d^{N-j}$ と書けた。そこでつぎの式をみたす j を考える:

$$S_0 u^j d^{N-j} = K.$$

これを j について解けば

$$j = \frac{\log(K/S_0) - N \log(d)}{\log(u/d)}. \quad (2.17)$$

これは一般には整数でないので、 j に最も近い整数を j' とおく:

$$j' = \left[\frac{\log(K/S_0) - N \log(d)}{\log(u/d)} \right].$$

ここで $[x]$ は x に最も近い整数を表す。この j' は N に依存することに注意。

- (2) つぎに λ を決める。 λ は

$$S_0 (u')^{j'} (d')^{N-j'} = K$$

を解いて、

$$\lambda = \frac{\log(K/S_0) - (2j' - N)\sigma\sqrt{\Delta t}}{N\sigma^2\Delta t} \quad (2.18)$$

とすればよい。(2.17) を使って $\log(K/S_0)$ を消去すると

$$\lambda = \frac{2(j - j')\sqrt{\Delta t}}{\sigma T}$$

となることが分かる。 $|j - j'| \leq 0.5$ だから、 $\Delta t \rightarrow 0$ ならば $\lambda \rightarrow 0$ なので、 Δt を十分小さくとれば、条件 (2.16) は満たされることが分かる。

まとめると、パラメータ

$$\begin{aligned} u' &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}, \quad d' = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t} \\ j' &= \left[\frac{\log(K/S_0) - N \log(d)}{\log(u/d)} \right] \\ \lambda &= \frac{\log(K/S_0) - (2j' - N)\sigma\sqrt{\Delta t}}{N\sigma^2\Delta t} \end{aligned}$$

*8実は CRR モデルにおいても同様の条件が必要であった。CRR モデルでは Δt を十分小さく取れば問題は起きない。

に対して CRR モデルと同様のプログラムを書けば、振動のない収束が得られる。実際に Tian モデルを実装した結果が図 2.4 である。ヨーロピアンコールオプションの価格を求めている。実線が Tian モデル、破線が CRR モデルである。\$N\$ は 10 から 60 まで 1 ずつ増やしていった。\$N\$ の増やし方を変えるとグラフの様子は大きく変わるが、大体の傾向はこのグラフと同様である。

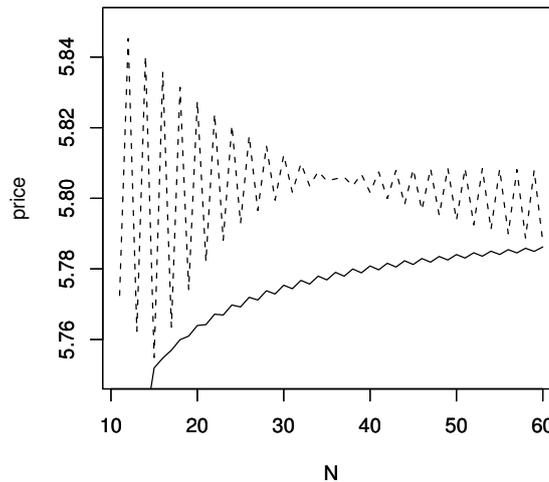


図 2.4 CRR モデルと Tian モデルの収束の比較

問題 2.1 Tian の方法によりアメリカンプットオプションの価格を計算し、期間の分割数を大きくしていったときの収束の様子を調べよ。

2.5 ヘッジ指標の計算

$V(t, S)$ を時点 t におけるオプションの価格とする (時刻 t と株価 S の関数)。このとき

$$\frac{\partial V}{\partial S}$$

を **デルタ** とよぶ。これは複製ポートフォリオを作るさいの原資産 S の保有数でもあった。二項モデルにおいてこの偏微分を計算するには、まず微分を離散近似する必要がある。一般に関数 $f(x)$ の (1 階) 微分はつぎのいずれかで近似する:

$$\begin{aligned} \text{前進差分: } & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \text{後退差分: } & \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ \text{中心差分: } & \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

中心差分は前進差分と後退差分の平均である。2項モデルにおいて求めた(0時点の)オプション価格を $V(S_0)$ とする(時間パラメータは省略)。前進差分を用いてデルタを求めるには h を微小な量として

$$\frac{V(S_0 + h) - V(S_0)}{(S_0 + h) - S_0} = \frac{V(S_0 + h) - V(S_0)}{h}$$

を計算すればよい。 $V(S_0)$ と $V(S_0 + h)$ は2項モデルによって計算する。よって、2回の近似計算が必要になる。これを1回で済ませるにはどうしたらよいだろうか。

2項モデルにおいて、 (i, j) ノードにおけるオプション価格を $V_{i,j}$ とする。多少の誤差には目をつぶって、時点 Δt における前進差分

$$\frac{V_{1,1} - V_{1,0}}{S_{1,1} - S_{1,0}}$$

をデルタの近似値とする方法が考えられる。もう少しよい方法がある。もし仮に $V_{0,1}, V_{0,-1}, S_{0,0}, S_{0,1}, S_{0,-1}$ が定義されているとすれば(図 2.5 を参照)。

$$\text{前進差分: } \frac{V_{0,1} - V_{0,0}}{S_{0,1} - S_{0,0}}, \quad \text{後退差分: } \frac{V_{0,0} - V_{0,-1}}{S_{0,0} - S_{0,-1}}, \quad \text{中心差分: } \frac{V_{0,1} - V_{0,-1}}{S_{0,1} - S_{0,-1}}$$

を用いてデルタを計算すればよいだろう。そこで、2項ツリーを拡張して $V_{0,1}$ などが定義できるようにする。

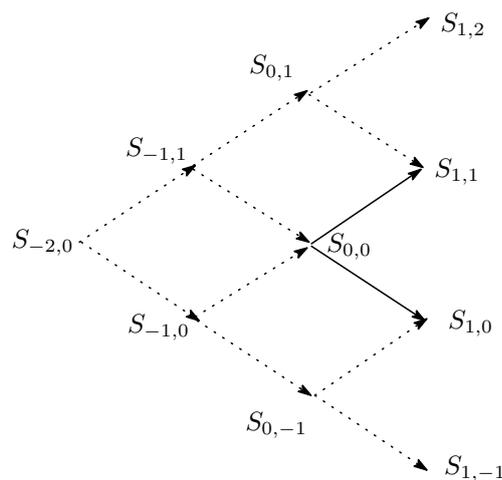


図 2.5 拡張ツリー

そのためには、たとえば CRR モデルでは

$$S_{0,1} = \frac{u}{d} S_0, \quad S_{0,-1} = \frac{d}{u} S_0, \quad S_{-1,1} = \frac{1}{d} S_0, \quad S_{-1,0} = \frac{1}{u} S_0, \quad S_{-2,0} = \frac{1}{ud} S_0$$

として、 $S_{-2,0}$ からツリーを構築すればよいだろう。

R のサンプルコード。2項モデルにおけるデルタの計算。

```
CRREcalldelta <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  #ヨーロッパコールオプションなので、ここでは株価ツリーは構築しないでおく
```

```

C <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+3) #オプション価格行列の初期化

delta <- T/N #時間間隔

u <- exp(sigma*sqrt(delta)) #上昇の大きさ
d <- exp(-sigma*sqrt(delta)) #下降の大きさ
p <- (exp(r*delta) - d)/(u - d) #リスク中立確率

#-----満期におけるオプションの支払いの計算 -----

for (j in 0:N){
  C[N+1, j+2] <- max(S0*u^j*d^(N-j) - K, 0)
}

#拡張されたノードにおけるオプションの支払い
C[N+1, N+3] <- max(S0*u^(N+1)/d -K, 0)
C[N+1, 1] <- max(S0*d^(N+1)/u -K,0)

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----

for (i in N:1) {
  for (j in 1:(i+2)) {
    C[i,j] <- exp(-r*delta)*(p*C[i+1,j+1] + (1-p)*C[i+1,j])
  }
}

GreeksDelta <- (C[1,3]-C[1,1])/(S0*(u/d-d/u)) #中心差分によるデルタの計算
return(GreeksDelta)
}

```

デルタの理論値は (1.29) より

$$\frac{\partial V}{\partial s} = N(d_+(T-t, s))$$

で計算できる。 $r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $S_0 = 62, K = 60$ のときのデルタは 0.739332。 2 項モデルでの近似値は

```

> CRREcallldelta(0.1,0.2,5/12,60,62,100)
[1] 0.7383179
>

```

2.6 ブラウン運動のツリー

確率微分方程式 (2.2) の解が

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (2.19)$$

であることを利用して、株価のツリーを構成してみよう。(5.8)において不確実性をもつのはブラウン運動 $\{W(t)\}$ の部分だけである。よって、ブラウン運動 $\{W(t)\}$ を近似するツリー $\{W_{i,j}\}$ を構成して、そこから $\{S(t)\}$ を近似するツリー $\{S_{i,j}\}$ を構成することができる。ブラウン運動 $\{W(t)\}$ を近似する2項ツリー

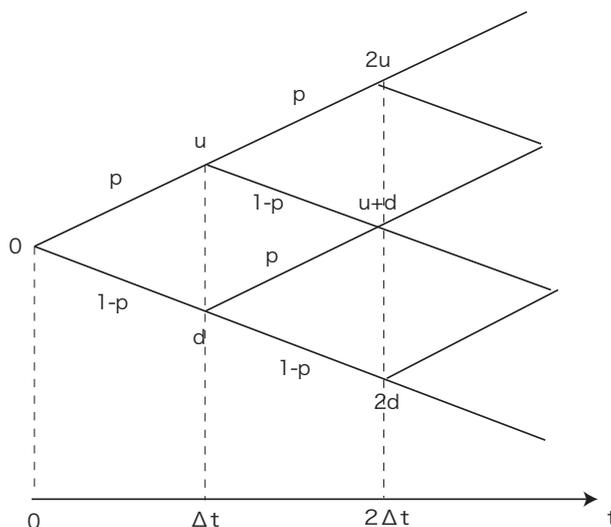
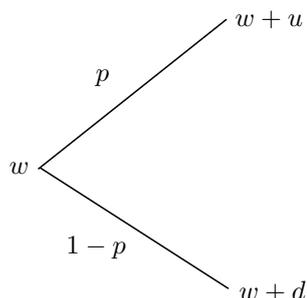


図 2.6 ブラウン運動の2項モデル

$\{W_{i,j}\}_{i=0,\dots,N,j=0,\dots,i}$ を構成しよう。CRR モデルと同様に時間空間 $[0, T]$ を N 等分し、 $\Delta t = T/N$, $t_i = i\Delta t$ ($i = 0, 1, \dots, N$) とおく。また、 $W_{i,j} = w$ のとき、 $W_{i+1,j+1} = w + u$, $W_{i+1,j} = w + d$ とし ($d < 0$)、 $W_{i,j}$



から $W_{i+1,j+1}$, $W_{i+1,j}$ に推移する確率をそれぞれ、 p , $1-p$ とおく。すなわち、ブラウン運動のツリーでは p の確率で u だけ上昇し、 $1-p$ の確率で d だけ上昇 ($-d$ だけ下降) する。以上の設定のもとで、ブラウン運動の振る舞いに整合するように、パラメータ u, d, p を決定する。

2項モデルにおいて、時刻 t_i で W_i の値が w であるという条件のもとでの W_{i+1} の期待値は

$$E[W_{i+1}|W_i = w] = p(w + u) + (1-p)(w + d) = w + pu + (1-p)d \quad (2.20)$$

となる。一方、 $W(t_i) = w$ という条件のもとでのブラウン運動 $W(t_i + \Delta t)$ の期待値は

$$\begin{aligned} E[W(t_i + \Delta t)|W(t_i) = w] &= E[W(t_i + \Delta t) - W(t_i) + W(t_i)|W(t_i) = w] \\ &= w + E[W(t_i + \Delta t) - W(t_i)] \\ &= w \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。(5.9) と (5.10) より

$$w + pu + (1-p)d = w \Leftrightarrow pu + (1-p)d = 0 \quad (2.22)$$

となる。つぎに分散を合わせる。2項モデルの条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[W_{i+1}|W_i = w] &= p(w+u)^2 + (1-p)(w+d)^2 - (p(w+u) + (1-p)(w+d))^2 \\ &= p(w+u)^2 + (1-p)(w+d)^2 - w^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。一方、ブラウン運動の条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[W(t_i + \Delta t)|W(t_i) = w] &= V[W(t_i + \Delta t) - W(t_i) + W(t_i)|W(t_i) = w] \\ &= V[W(t_i + \Delta t) - W(t_i)] \\ &= \Delta t \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる。(5.12) と (5.13) より

$$p(w+u)^2 + (1-p)(w+d)^2 - w^2 = \Delta t \quad (2.25)$$

となる。(5.11) と (5.14) をみたら u, d, p を決めればよいが、自由度が1つある。ここでは、 $d = -u$ と設定してみよう。すると、(5.11) と (5.14) は

$$pu + (1-p)(-u) = 0, \quad p(w+u)^2 + (1-p)(w-u)^2 - w^2 = \Delta t$$

となる。これを解くと

$$p = \frac{1}{2}, \quad u = \sqrt{\Delta t}, \quad d = -\sqrt{\Delta t}$$

が得られる。これらのパラメータをもとにブラウン運動を近似するツリー $\{W_{i,j}\}$ をつくり、それに応じて株価のツリーを

$$S_{i,j} = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t_i + \sigma W_{i,j} \right\}$$

によってつくればよい。

これらをもとにヨーロピアンコールオプションのプログラムを書くとなつぎのようになる。

```
BtreeEcall <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  W <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #ブラウン運動行列の初期化
  S <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #株価行列の初期化
  C <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #オプション価格行列の初期化

  delta <- T/N #時間間隔
```

```

u <- sqrt(delta)           #上昇の大きさ
d <- -sqrt(delta)          #下降の大きさ
p <- 0.5 #リスク中立確率

#----- 株価ツリーの構築 -----
mu <- r - 0.5*sigma^2

for (i in 0:N){
  for (j in 0:i){
    W[i+1,j+1] <- j*u + (i - j)*d # (2*j-i)*sqrt(delta) でもよい
    S[i+1,j+1] <- S0*exp(mu*i*delta + sigma*W[i+1,j+1])
  }
}

#-----満期におけるオプションのペイオフの計算 -----

for (j in 0:N){
  C[N+1, j+1] <- max(S[N+1,j+1] - K, 0)
}

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----

for (i in N:1) {
  for (j in 1:i) {
    C[i,j] <- exp(-r*delta)*(p*C[i+1,j+1] + (1-p)*C[i+1,j])
  }
}
return(C[1,1])
}

```

2.7 Richardson の補外法

$[0, T]$ 区間の分割数を N , 1 区間の長さを $h = T/N$ とし, このときにツリーモデルにより得られるオプションの価格を $C(h)$ とする. $C(h), C(h/2), C(h/3), \dots, C(h/n)$ が与えられたとき, $C(0)$ の値を補外して求めることを考える. まず結果を書くと

$$C(0) \approx \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} i^n}{i!(n-i)!} C\left(\frac{h}{i}\right)$$

とすればよい.

$n = 2$ のとき、つまり $C(h), C(h/2)$ から $C(0)$ を近似することを考える。 $C(\cdot)$ が微分可能であると仮定して、テイラー展開を使うと

$$\begin{aligned} C(h) &\approx C(0) + C'(0)h \\ C\left(\frac{h}{2}\right) &\approx C(0) + C'(0)\frac{h}{2} \end{aligned}$$

となる。この2式を $C(0), C'(0)$ について解くと

$$\begin{pmatrix} C(0) \\ C'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2/h & -2/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(h) \\ C(h/2) \end{pmatrix}$$

となる。よって、

$$C(0) \approx -C(h) + 2C(h/2) \quad (2.26)$$

という近似式を得る。(2.26)の右辺は精度のよい近似式になっている。

$$C(0) = C(h) + ah + O(h^2) \quad (2.27)$$

と書けているとしよう。誤差が h のオーダーであることに注意する。このとき、

$$C(0) = C(h/2) + ah/2 + O(h^2) \quad (2.28)$$

となる。(2.28) $\times 2 - (2.27)$ を計算すると $2C(0) - C(0) = 2C(h/2) - C(h) + O(h^2)$ 、すなわち

$$C(0) = -C(h) + 2C(h/2) + O(h^2)$$

となる。よって、誤差が h^2 のオーダーになっており、 $-C(h) + 2C(h/2)$ は $C(h)$ よりも近似精度がよい。 $n = 3$ のときも同様にすると

$$C(0) \approx \frac{1}{2}C(h) - 4C(h/2) + \frac{9}{2}C(h/3)$$

となる。

ただし、オプション価格の近似にこの補外法を用いるためには $C(h)$ が $C(0)$ に滑らかに (振動しないで) 収束しなければ効果が得られない可能性がある。よって、2.4節で紹介したような振動収束を解消する手法が重要になる。ここでは2.4節で紹介したアルゴリズムを使った計算例を示す。例えば、 $r = 0.1, S_0 = 62, K = 60, \sigma = 0.2, T = 5/12$ のときのコールオプションの現在価格は、Black-Scholes式により 5.797781であった。 $N = 300, 600$ としたときの近似解は

```
> CRREcallsmooth(0.1, 0.2, 5/12, 60, 62, 300)
```

```
[1] 5.795431
```

```
> CRREcallsmooth(0.1, 0.2, 5/12, 60, 62, 600)
```

```
[1] 5.796615
```

```
>
```

よって、(2.26)を使えば近似値は 5.797798 となる。ところが、通常の CRR モデルを使っても、これほどよい近似は得られない (試してみよ)。

2.8 多次元ツリー

Black-Scholes モデルにおいて問題となる株価過程は 1 次元であった。しかし、確率的ボラティリティや確率的金利、または複数の株価を原資産とするオプションなどを考えるとき、多次元の確率過程を考える必要がでてくる。ここでは 2 つの株価を原資産とするオプション価格を求めるために、2 次元 2 項ツリーを構築してみる。

モデルはつぎのようにする。2 つの株式 1, 2 があり、その株価がリスク中立確率のもとでそれぞれ

$$\begin{aligned} dS^1(t) &= rS^1(t)dt + \sigma^1 S^1(t)dW^1(t) \\ dS^2(t) &= rS^2(t)dt + \sigma^2 S^2(t)d\left[\rho W^1(t) + \sqrt{1-\rho^2}W^2(t)\right] \end{aligned}$$

という確率過程にしたがうとする。ただし、 $-1 \leq \rho \leq 1$, $\sigma^1 > 0$, $\sigma^2 > 0$ は定数、安全資産は $B(t) = e^{rt}$ にしたがうとする ($r \geq 0$)。ここで、 (W^1, W^2) は 2 次元ブラウン運動である。株価過程 S^2 を駆動している確率過程 $W^3 = \rho W^1 + \sqrt{1-\rho^2}W^2$ はじつはブラウン運動になる。また、ブラウン運動 W_1, W_3 の (増分の) 相関は ρ となる。まず、伊藤公式の演算ルールから

$$dW^1 \cdot dW^3 = dW^1 \cdot (\rho dW^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW^2) = \rho dW^1 \cdot dW^1 = \rho dt.$$

つぎに伊藤の公式から

$$d(W^1(t)W^3(t)) = W^3(t)dW^1(t) + W^1(t)dW^3(t) + dW^1 \cdot dW^3(t) = W^3(t)dW^1(t) + W^1(t)dW^3(t) + \rho dt.$$

よって、積分形で書くと

$$W^1(t)W^3(t) = \int_0^t W^3(u)dW^1(u) + \int_0^t W^1(u)dW^3(u) + \rho t.$$

よって、(確率積分の期待値は 0 なので)

$$E[W^1(t)W^3(t)] = \rho t$$

であるから、ブラウン運動 $W^1(t), W^3(t)$ の分散が t であることを思い出せば、 ρ が $W^1(t), W^3(t)$ の相関を表すことが分かるだろう。また、

$$E_t [(W^1(t+\Delta t) - W^1(t))(W^3(t+\Delta t) - W^3(t))] = \rho \Delta t$$

も成り立つ。そこで、ブラウン運動 $\rho W^1 + \sqrt{1-\rho^2}W^2$ を改めて W^2 と書いて、株価のモデルを

$$\begin{aligned} dS^1(t) &= rS^1(t)dt + \sigma^1 S^1(t)dW^1(t) \\ dS^2(t) &= rS^2(t)dt + \sigma^2 S^2(t)dW^2(t) \end{aligned}$$

と書く。ただし、 W^1, W^2 は相関 $-1 \leq \rho \leq 1$ をもつブラウン運動である (このことを $dW^1 \cdot dW^2 = \rho dt$ とよく書く)。(S^1, S^2) を近似する 2 項ツリーを構築しよう。まず、 $[0, T]$ を N 等分し、相関 ρ をもつブラウン運動 W^1, W^2 の 2 項ツリー

$$\{W_{i,j}^1\}_{j=0,1,\dots,i, i=0,1,\dots,N}, \{W_{i,k}^2\}_{k=0,1,\dots,i, i=0,1,\dots,N}$$

を構築する. ここで, $W_{i,j}^1$ は時点 $i\Delta t$ において, 値の小さい方から $j+1$ 番目の項を表す. $W_{i,k}^2$ についても同様. $W_i^1 = \{W_{i,j}^1\}_{j=0,\dots,i}$, $W_i^2 = \{W_{i,k}^2\}_{k=0,\dots,i}$ とおく. $W_{i,j}^1 = w^1$, $W_{i,k}^2 = w^2$ とおき,

$$\begin{aligned} W_{i+1,j+1}^1 &= w^1 + \Delta w^1, & W_{i+1,j}^1 &= w^1 - \Delta w^1, \\ W_{i+1,k+1}^2 &= w^2 + \Delta w^2, & W_{i+1,k}^2 &= w^2 - \Delta w^2 \end{aligned}$$

とする. ここで, $\Delta w^1, \Delta w^2 > 0$ とする. また, (w^1, w^2) から,

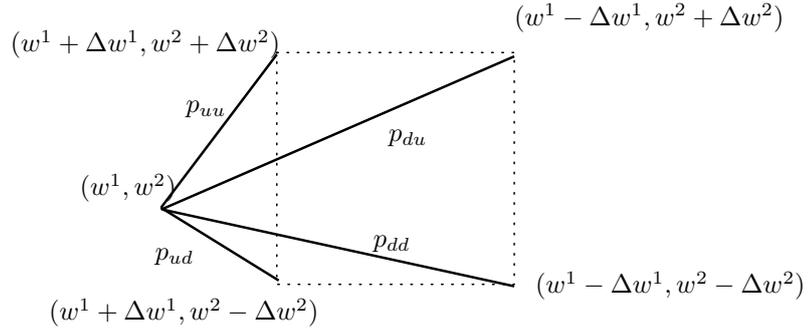


図 2.7 2次元2項ツリー

$$(w^1 + \Delta w^1, w^2 + \Delta w^2), (w^1 + \Delta w^1, w^2 - \Delta w^2), (w^1 - \Delta w^1, w^2 + \Delta w^2), (w^1 - \Delta w^1, w^2 - \Delta w^2)$$

への推移確率をそれぞれ

$$p_{uu}, p_{ud}, p_{du}, p_{dd}$$

とする (図 2.7). よって, 求めるべきパラメータは

$$\Delta w^1, \Delta w^2, p_{uu}, p_{ud}, p_{du}, p_{dd}$$

である. 1次モーメント (期待値), 2次モーメント (分散), そして相関を合わせることにより, これらのパラメータを決定する.

1次モーメント (期待値) を合わせる. 2次元2項モデルにおいて, $W_i^1 = w^1$ という条件のもとでの, $W_{i+1}^1 - W_i^1$ の期待値は

$$\begin{aligned} E[W_{i+1}^1 - W_i^1 | W_i^1 = w^1] &= p_{uu}\Delta w^1 + p_{ud}\Delta w^1 + p_{du}(-\Delta w^1) + p_{dd}(-\Delta w^1) \\ &= (p_{uu} + p_{ud})\Delta w^1 - (p_{du} + p_{dd})\Delta w^1 \end{aligned}$$

となる. 一方, $W^1(t_i) = w_1$ という条件のもとでの, $W^1(t_i + \Delta t) - W^1(t_i)$ の期待値は 0 である. よって,

$$p_{uu} + p_{ud} - p_{du} - p_{dd} = 0. \quad (2.29)$$

同様に W^2 の期待値を合わせて,

$$p_{uu} - p_{ud} + p_{du} - p_{dd} = 0. \quad (2.30)$$

つぎに 2次モーメントを合わせる. $W_i^1 = w^1$ という条件のもとでの, $W_{i+1}^1 - W_i^1$ の 2次モーメントは

$$\begin{aligned} E[(W_{i+1}^1 - W_i^1)^2 | W_i^1 = w^1] &= p_{uu}(\Delta w^1)^2 + p_{ud}(\Delta w^1)^2 + p_{du}(-\Delta w^1)^2 + p_{dd}(-\Delta w^1)^2 \\ &= (p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd})(\Delta w^1)^2. \end{aligned}$$

一方, $W^1(t_i) = w_1$ という条件のもとでの, $W^1(t_i + \Delta t) - W^1(t_i)$ の 2 次モーメントは Δt である. よって,

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = \frac{\Delta t}{(\Delta w^1)^2}. \quad (2.31)$$

W^2 のほうも同様にして,

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = \frac{\Delta t}{(\Delta w^2)^2}. \quad (2.32)$$

つぎに相関 (共分散) を合わせる. $W_i^1 = w^1, W_i^2 = w^2$ という条件のもとで

$$\begin{aligned} & E[(W_{i+1}^1 - W_i^1)(W_{i+1}^2 - W_i^2) | W_i^1 = w^1, W_i^2 = w^2] \\ &= p_{uu}\Delta w^1\Delta w^2 + p_{ud}\Delta w^1(-\Delta w^2) + p_{du}(-\Delta w^1)\Delta w^2 + p_{dd}(-\Delta w^1)(-\Delta w^2) \\ &= (p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd})\Delta w^1\Delta w^2 \end{aligned}$$

となる. 一方,

$$E[(W^1(t_i + \Delta t) - W_i^1)(W^2(t_i + \Delta t) - W_i^2) | W^1(t_i) = w^1, W^2(t_i) = w^2] = \rho\Delta t$$

である. よって,

$$p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd} = \frac{\rho\Delta t}{\Delta w^1\Delta w^2}. \quad (2.33)$$

(2.29)-(2.33) に加えて

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1$$

を解くと,

$$\Delta w^1 = \Delta w^2 = \sqrt{\Delta t}, \quad p_{uu} = p_{dd} = \frac{1}{4}(1 + \rho), \quad p_{ud} = p_{du} = \frac{1}{4}(1 - \rho)$$

が求まる.

このモデルにおいて, コールスプレッドオプションの価格を求めてみよう. コールスプレッドオプションの支払い関数は

$$h(S^1(t), S^2(t)) = (S^1(t) - S^2(t) - K)^+$$

である. アルゴリズムは以下の通り.

- (1) 上で定めたパラメータ $\Delta w^1, \Delta w^2, p_{uu}, p_{ud}, p_{du}, p_{dd}$ を使って, 相関が ρ の 2 次元ブラウン運動のツリー $\{W_{i,j}^1\}_{j=0,\dots,i,i=0,\dots,N}, \{W_{i,k}^2\}_{k=0,\dots,i,i=0,\dots,N}$ を構築する.

$$W_{i,j}^1 = (2j - i)\Delta w^1, \quad W_{i,k}^2 = (2k - i)\Delta w^2$$

となる. 同時に株価のツリー $\{S_{i,j}^1\}, \{S_{i,k}^2\}$ を

$$S_{i,j}^1 = S^1(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2 \right) i\Delta t + \sigma^1 W_{i,j}^1 \right\}, \quad S_{i,k}^2 = S^2(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}(\sigma^2)^2 \right) i\Delta t + \sigma^2 W_{i,k}^2 \right\}$$

と構築する.

- (2) 満期時点におけるオプションの価値を計算する.

$$V_{N,j,k} = (S_{N,j}^1 - S_{N,k}^2 - K)^+, \quad j, k = 0, 1, \dots, N$$

- (3) オプション価格を後ろ向きに計算する.

$$V_{i,j,k} = e^{-r\Delta t} (p_{uu}V_{i+1,j+1,k+1} + p_{ud}V_{i+1,j+1,k} + p_{du}V_{i+1,j,k+1} + p_{dd}V_{i+1,j,k})$$

とする.

- (4) $V_{0,0,0}$ がオプション価格.

2.9 3項ツリーモデル

2.9.1 一般的な考え方

幾何ブラウン運動を扱う前に、一般的な確率微分方程式を3項モデルで近似することを考える。確率微分方程式

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), X(0) = x_0. \quad (2.34)$$

を考える。つぎのように設定する。

- $[0, T]$ を N 等分する。 $\Delta t = T/N$
- $t_i = i\Delta t$
- ノード (i, j) ($i = 0, 1, \dots, N, j = -i, -i+1, \dots, 0, 1, \dots, i$) における値を $X_{i,j}$ と書き, $X_i = \{X_{i,j}\}_{-i \leq j \leq i}$ とする。

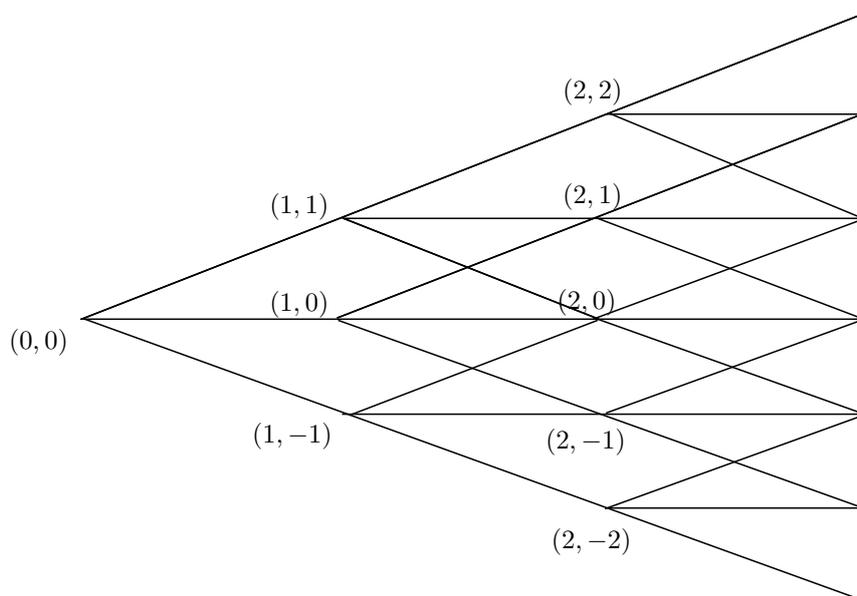


図 2.8 3項ツリー

$X_{i,j} = x$, $X_{i+1,j+1} = x_u$, $X_{i+1,j} = x_m$, $X_{i+1,j-1} = x_d$ とし, x から x_u, x_m, x_d への推移確率をそれぞれ p_u, p_m, p_d とする。このとき, (2.34) と整合するように

$$p_u, p_m, p_d, x_u, x_m, x_d$$

を決めたい。また, これらの値は一般には i, x に依存することに注意。

(2.34) を離散近似すると

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(X(t))\Delta t + \sigma(X(t))\sqrt{\Delta t}z, \quad z \sim N(0, 1)$$

となるから, $X(t) = x$ という条件の下での $X(t + \Delta t) - X(t)$ の期待値と分散は

$$E[X(t + \Delta t) - X(t)|X(t) = x] = \mu(x)\Delta t, \quad V[X(t + \Delta t) - X(t)|X(t) = x] = \sigma^2(x)\Delta t \quad (2.35)$$

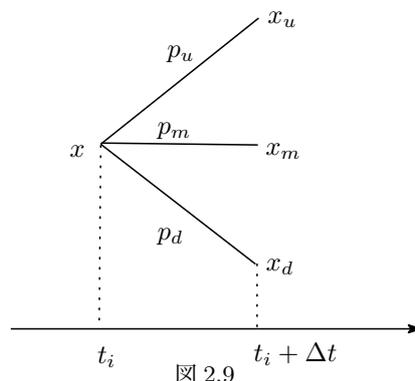


図 2.9

と計算できることに注意する. 3項モデルにおいて, $X_i = x$ という条件のもとでの $X_{i+1} - X_i$ の期待値は

$$E[X_{i+1} - X_i | X_i = x] = p_u(x_u - x) + p_m(x_m - x) + p_d(x_d - x) = p_u x_u + p_m x_m + p_d x_d - x.$$

一方, (2.35) より, $E[X(t_i + \Delta t) - X(t_i) | X(t_i) = x] = \mu(x)\Delta t$ だから,

$$p_u x_u + p_m x_m + p_d x_d - x = \mu(x)\Delta t \quad (2.36)$$

となる.

つぎに 2 次モーメントを合わせる (もちろん, 分散を合わせてもよい. 同じことである.). $X_{i+1} - X_i$ の $X_i = x$ という条件のもとでの 2 次モーメントは

$$E[(X_{i+1} - X_i)^2 | X_i = x] = p_u(x_u - x)^2 + p_m(x_m - x)^2 + p_d(x_d - x)^2.$$

一方, (2.35) より, $X(t_i) = x$ という条件のもとでの期待値は

$$\begin{aligned} & E[(X(t_i + \Delta t) - X(t_i))^2 | X(t_i) = x] \\ &= V[X(t_i + \Delta t) - X(t_i) | X(t_i) = x] + (E[X(t_i + \Delta t) - X(t_i) | X(t_i) = x])^2 \\ &= \sigma^2(x)\Delta t + (\mu(x)\Delta t)^2. \end{aligned}$$

よって,

$$p_u(x_u - x)^2 + p_m(x_m - x)^2 + p_d(x_d - x)^2 = \sigma^2(x)\Delta t + (\mu(x)\Delta t)^2 \quad (2.37)$$

となる. また, p_u, p_m, p_d は確率だから

$$p_u + p_m + p_d = 1 \quad (2.38)$$

がなりたつ.

以上の条件 (2.36), (2.37), (2.38) を満たす $x_u, x_m, x_d, p_u, p_m, p_d$ を決めればよい. 明らかにこれらのパラメータの選び方には自由度がある. ツリーを構築しやすいように選ばばよいが, モデルに矛盾を起こすような選び方をしてはいけない. 特に,

$$0 < p_u, p_m, p_d < 1 \quad (2.39)$$

が満たされなければならないことに注意せよ. また p_u, p_m, p_d は一般には $(\mu(x), \sigma(x))$ を通して x に依存する. すると, (2.39) を満たすようにパラメータを決めるのが難しいことがある. よって, 通常はまず確率微分方程式をツリーを構築しやすいような確率微分方程式に変換し, そのツリーをもとに元の確率微分方程式のツリーを構築することが多い.

2.9.2 幾何ブラウン運動 (Black-Scholes モデル)

幾何ブラウン運動

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2.40)$$

を3項ツリーで近似しよう。2項モデルのときと同様に (2.40) に含まれる $W(t)$ を近似する3項ツリー $\{W_{i,j}\}$ を構築し、このツリーを使って

$$S_{i,j} = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t_i + \sigma W_{i,j} \right\} \quad (2.41)$$

とすればよい。

(2.36), (2.37) において, $\mu = 0, \sigma = 1$ とすると

$$\begin{aligned} p_u x_u + p_m x_m + p_d x_d - x &= 0 \\ p_u (x_u - x)^2 + p_m (x_m - x)^2 + p_d (x_d - x)^2 &= \Delta t \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる。ここで、(あとで適当に定める) 新たなパラメータ Δx を導入して

$$x_u = x + \Delta x, \quad x_m = x, \quad x_d = x - \Delta x$$

としよう。これらを (2.42) に代入すると

$$\begin{aligned} p_u \Delta x - p_d \Delta x &= 0 \Leftrightarrow p_u = p_d \\ p_u (\Delta x)^2 + p_d (\Delta x)^2 &= \Delta t \Leftrightarrow p_u + p_d = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

となる。(2.38) と (2.43) を解くと

$$p_u = p_d = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}, \quad p_m = 1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

となる。よって, $0 < p_u, p_m, p_d < 1$ であるためには

$$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1$$

であればよい。ここでは

$$\Delta x = \sqrt{3\Delta t}$$

とおくことにする。すると

$$p_u = p_d = \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}$$

となる。これで全てのパラメータが定まった。

ヨーロピアンコールオプションを求めるアルゴリズムはつぎの通り。

(1) パラメータ

$$x_u = x + \Delta x, \quad x_m = x, \quad x_d = x - \Delta x, \quad p_u = p_d = \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}$$

を使って、ブラウン運動の3項ツリー $\{W_{i,j}\}_{i=0,\dots,N, j=-i,\dots,i}$ を構築する。 $W_{0,0} = W(0) = 0$ に注意すると、

$$W_{i,j} = j\Delta x \quad (-i \leq j \leq i)$$

となる。

(2) ブラウン運動のツリー $\{B_{i,j}\}$ を使って株価過程のツリー $\{S_{i,j}\}$ を

$$S_{i,j} = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \cdot i + \sigma W_{i,j} \right\}$$

と構築する.

(3) 満期時点におけるオプションの価値を計算する. コールオプションの場合

$$V_{N,j} = (S_{N,j} - K)^+, \quad j = -N, \dots, 0, \dots, N$$

となる.

(4) オプションの価格を後ろ向きに計算していく:

$$V_{i,j} = e^{-r\Delta t} (p_u V_{i+1,j+1} + p_m V_{i+1,j} + p_d V_{i+1,j-1}).$$

(5) $V_{0,0}$ がオプション価格.

3項ツリーによるヨーロッパンコールオプションの価格.

```
TriEcall <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  S <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=2*N+1)  #株価行列の初期化
  V <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=2*N+1)  #オプション価格行列の初期化

  delta <- T/N                          #時間間隔

  dx <- sqrt(3*delta)                    #上昇幅
  pu <- 1/6                               #上昇確率
  pm <- 2/3                               #変動なし確率
  pd <- 1/6                               #下降確率

  #----- 株価ツリーの構築 -----
  W <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=2*N+1)  #ブラウン運動のツリーの初期化
  W[1,1] <- 0                            #ブラウン運動の初期値
  S[1,1] <- S0                            #株価の初期値

  mu <- r - sigma^2/2

  for (i in 2:(N+1)){

    muti <- mu*delta*(i-1)
    W[i,i] <- 0                            #ツリー真ん中
    S[i,i] <- S0*exp(muti + sigma*W[i,i])  #株価ツリー真ん中

    for (j in 1:(i-1)){
```

```

    W[i,i+j] <- j*dx      #ツリー上半分
    W[i,i-j] <- -j*dx    #ツリー下半分

    S[i,i+j] <- S0*exp(muti + sigma*W[i,i+j]) #株価ツリー上半分
    S[i,i-j] <- S0*exp(muti + sigma*W[i,i-j]) #株価ツリー下半分
  }
}

#-----満期におけるオプションのペイオフの計算 -----
for (j in 1:(2*N+1)){
  V[N+1, j] <- max(S[N+1,j] - K, 0) #コールオプション
}

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
for (i in N:1) {
  for (j in 1:(2*i-1)) {
    V[i,j] <- exp(-r*delta)*(pu*V[i+1,j+2] + pm*V[i+1,j+1] + pd*V[i+1,j])
  }
}
return(V[1,1])
}

```

実行例

```

> TriEcall(0.1,0.2,5/12,60,62,100)
[1] 5.792922
>

```

収束の様子は図 2.10 の通り。破線が 2 項モデル (CRR モデル)、実線が 3 項モデル。

2.10 金利モデル

2.10.1 金利モデル

金利モデルのツリーについて簡単に説明する。金利モデルについては D. Brigo, F. Mercurio, “Interest Rate Models Theory and Practice”, Springer Financeなどを参照せよ。金利 (瞬間的金利, スポットレート) は

$$dr(t) = (\phi(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(r(t), t)dW(t) \quad (2.44)$$

という形の確率微分方程式でモデル化されることが多い。例えば, Vasicek モデル (Ornstein-Uhlenbeck 過程) は

$$dr(t) = \lambda(\bar{r} - r(t))dt + \sigma dW(t),$$

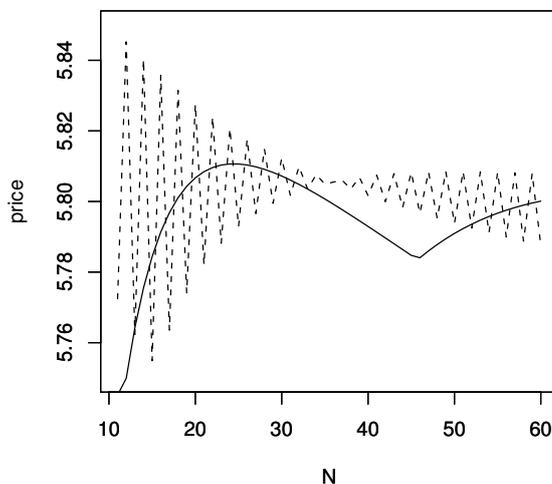


図 2.10 2 項モデルと 3 項モデルの収束の比較

CIR (Cox, Ingersoll, Ross) モデル (Feller 過程, 平方根過程) は

$$dr(t) = \lambda(\bar{r} - r(t)) + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

という形の確率過程である。これらのモデルは**平均回帰性**という特徴をもつ。簡単のために

$$\phi(t), a(t), \sigma(r(t), t)$$

を全て正の定数として, (2.44) を離散近似すると

$$r(t + \Delta t) - r(t) = (\phi - ar(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z, \quad z \sim N(0, 1).$$

もし, t 時点において $\phi - ar(t) > 0 \Leftrightarrow r(t) < \phi/a$ だとして, 誤差項を無視すると, $r(t + \Delta t) > r(t)$ となる。すなわち, r は増加する方向に動く。一方, t 時点において $\phi - ar(t) < 0 \Leftrightarrow r(t) > \phi/a$ とすると, $r(t + \Delta t) < r(t)$ となり, r は減少する方向に動く。 $r(t)$ が ϕ/a より大きいかわりに小さいかによって, その後の振る舞いが変わる。この ϕ/a を平均回帰水準とよぶ。(2.44) を直接ツリー化するのは難しいので, これを変形したものをツリー化する。

まず, $\alpha(t)$ を適当な微分可能関数として, $X(t) = r(t) - \alpha(t)$ とおく。 X がしたがう確率微分方程式は

$$\begin{aligned} dX(t) &= dr(t) - \alpha'(t)dt \\ &= (\phi(t) - \alpha'(t) + a(t)r(t))dt + \sigma(r(t), t)dW(t) \\ &= (\phi(t) - \alpha'(t) - a(t)\alpha(t) - a(t)X(t)) + \sigma(X(t) + \alpha(t))dW(t) \end{aligned}$$

となる。ここで, α を

$$\alpha'(t) = \phi(t) - a(t)\alpha(t), \quad \alpha(0) = r(0)$$

を満たすような関数だとすると,

$$dX(t) = -a(t)X(t) + \hat{\sigma}(X(t), t)dW(t), \quad X(0) = 0 \tag{2.45}$$

となる。ただし、 $\hat{\alpha}(X(t), t) = \sigma(X(t) + \alpha(t))$ 。よって、(2.45) のツリーを作れば、そこから (2.44) のツリーを $r(t) = \alpha(t) + X(t)$ から作ることができる。この α をシフト関数とよぶ。

2.10.2 Hull-White モデル

ここでは、

$$dr(t) = -ar(t)dt + \sigma dW(t) \quad (2.46)$$

という形の確率微分方程式を近似する 3 項ツリーを構成してみよう。(2.46) は解くことができ、解は

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW(u)$$

となる。また $r(t)$ の条件付き期待値と条件付き分散は

$$E[r(t + \Delta t) | r(t) = r] = re^{-a\Delta t}, \quad V[r(t + \Delta t) | r(t) = r] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a\Delta t})$$

となる。ツリーの設定は 2.9.1 項と同様とする。(2.46) より

$$\begin{aligned} E[r(t_i + \Delta t) - r(t_i) | r(t_i) = r] &= -ar\Delta t \\ E[(r(t_i + \Delta t) - r(t_i))^2 | r(t_i) = r] &= \sigma^2\Delta t + (-ar\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる。ここで、 $r_u = r + \Delta r$, $r_m = r$, $r_d = r - \Delta r$ とする。すると、(2.47) より

$$\begin{aligned} p_u - p_d &= -ar \frac{\Delta t}{\Delta r} \\ p_u + p_d &= \frac{\sigma^2\Delta t + (ar\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} \end{aligned}$$

となる。この 2 式と $p_u + p_m + p_d = 1$ を解くと

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{\sigma^2\Delta t + (ar\Delta t)^2 - ar\Delta t\Delta r}{2(\Delta r)^2} \\ p_m &= 1 - \frac{\sigma^2\Delta t + (ar\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} \\ p_d &= \frac{\sigma^2\Delta t + (ar\Delta t)^2 + ar\Delta t\Delta r}{2(\Delta r)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ とする*9。 $r_{i,j} = j\Delta r$ に注意すると、

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{\sigma^2 j^2 (\Delta t)^2 - aj\Delta t}{2} \\ p_m &= \frac{2}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{\sigma^2 j^2 (\Delta t)^2 + aj\Delta t}{2} \end{aligned}$$

となる*10。これらの確率が $0 < p_u, p_m, p_d < 1$ を満たすためには

$$-\frac{\sqrt{6}}{3a\Delta t} < j < \frac{\sqrt{6}}{3a\Delta t}$$

*9 必ずしもこうする必要はない。 $0 < p_u, p_m, p_d < 1$ を満たせばよい。

*10 このモデルの場合、推移確率 p_u, p_m, p_d は j に依存するので $p_u(j)$ などと書いた方がよい。しかし、ここでは省略して p_u などと書く。

でなければならない。よって、 j には上限と下限があることになる。より近似精度を高めるため、ツリーを大きくすると j は限りなく大きくなっていく。そのため、 j が上限・下限を超えたときは別に考える必要がある。

下限を超えたとき ($j < -\sqrt{6}/(3a\Delta t)$) はつぎのようにする。図 2.11 のような分岐を考える。このときは、

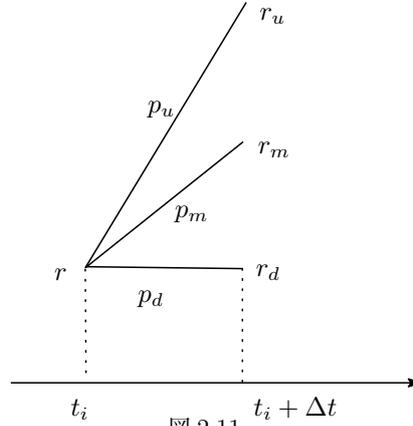


図 2.11

ツリーが再結合するように

$$r_u = r + 2\Delta r, \quad r_m = r + \Delta r, \quad r_d = r$$

とする。あとは、上と同様にすると

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{\sigma^2 j^2 (\Delta t)^2 + aj\Delta t}{2} \\ p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 + 2aj\Delta t \\ p_d &= \frac{7}{6} + \frac{\sigma^2 j^2 (\Delta t)^2 + 3aj\Delta t}{2} \end{aligned}$$

これらの確率が $0 < p_u, p_m, p_d < 1$ を満たすためには

$$-\frac{3 + \sqrt{6}}{3a\Delta t} < j < -\frac{3 - \sqrt{6}}{3a\Delta t}$$

でなければならない。これは $j < -\sqrt{6}/(3a\Delta t)$ であれば (かつ j があまり小さくなりすぎなければ)、満たされる。

上限を超えたときは図 2.12 のような分岐を考える。このときは

$$r_u = r, \quad r_m = r - \Delta r, \quad r_d = r - 2\Delta r$$

とする。あとは、上と同様にすると

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{7}{6} + \frac{\sigma^2 j^2 (\Delta t)^2 - 3aj\Delta t}{2} \\ p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 + 2aj\Delta t \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{\sigma^2 j^2 (\Delta t)^2 - aj\Delta t}{2} \end{aligned}$$

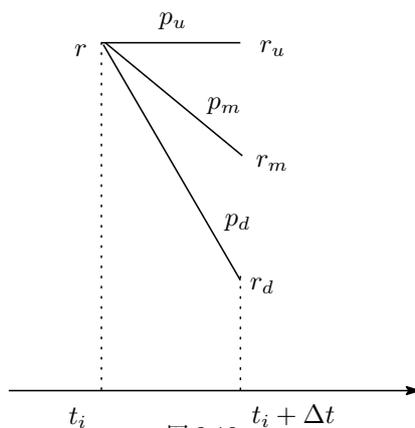


図 2.12

これらの確率が $0 < p_u, p_m, p_d < 1$ を満たすためには

$$\frac{3 - \sqrt{6}}{3a\Delta t} < j < \frac{3 + \sqrt{6}}{3a\Delta t}$$

でなければならない。これは $j > \sqrt{6}/(3a\Delta t)$ であれば (かつ j があまり大きくなりすぎなければ), 満たされる。以上の, $\Delta x, p_u, p_m, p_d$ をもとに 3 項ツリーをつくれれば (2.46) を近似することができる。

2.10.3 Vasicek モデル

つぎに Vasicek モデル

$$dr(t) = \lambda(\bar{r} - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.48)$$

を近似するツリーを構築してみよう。ちなみに (2.48) の解は

$$r(t) = \bar{r} + (r(0) - \bar{r})e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW(u)$$

であり, 条件付き期待値と条件付き分散は

$$E[r(t + \Delta t)|r(t) = r] = \bar{r} + (r - \bar{r})e^{-\lambda\Delta t}, \quad V[r(t + \Delta t)|r(t) = r] = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda\Delta t})$$

である。シフト関数を決めてあとは Hull-White モデルと同様にすればよい。シフト関数は

$$\alpha'(t) = -\alpha(t) + \lambda\bar{r}, \quad \alpha(0) = r(0)$$

を満たす $r(t)$ である。これを解くと

$$\alpha(t) = e^{-\lambda t} \left(\lambda\bar{r} \int_0^t e^{\lambda s} ds + r(0) \right) \quad (2.49)$$

となる。よって

$$dX(t) = -\lambda X(t) + \sigma dW(t)$$

のツリーを 2.10.2 節のように構築すれば, それにあわせて $r(t) = X(t) - \alpha(t)$ によって $r(t)$ のツリーが構築できる。

2.10.4 CIR モデル

CIR モデル

$$dr(t) = \lambda(\bar{r} - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2.50)$$

を近似するツリーを構築する。このモデルはボラティリティが一定でないため、このままツリー化するのは難しい。そこで、Nelson and Ramaswamy(1990) *11 はつぎのような方法を提案した。まず、 $r(t)$ を変換した関数 $f(t, r(t))$ を考える。もし、 $f(t, r(t))$ のボラティリティが定数になるような f を見つけることができれば、 $f(t, r(t))$ のツリーを構築し、そこから f の逆変換によって $r(t)$ のツリーが構築できる。実際、そのような f はつぎのように見つけることができる。伊藤の公式により

$$\begin{aligned} df(t, r(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial r} \lambda(\bar{r} - r(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sigma^2 r(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt + \frac{\partial f}{\partial r} \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\sigma r(t)}$ 、すなわち

$$f(t, r) = \int_0^r \frac{dr}{\sigma \sqrt{r}} \quad (2.51)$$

とすれば、 $f(t, r(t))$ のボラティリティは 1 となる。(2.51) を解くと

$$f(t, r) = \frac{2\sqrt{r}}{\sigma}$$

となる。よって、 $f(t, r(t))$ の満たす確率微分方程式は

$$df(t, r(t)) = \frac{\lambda}{\sigma \sqrt{r(t)}} \left(\bar{r} - \frac{\sigma^2}{4\lambda} - r(t) \right) dt + dW(t)$$

となる。この $f(t, r(t))$ のツリーを構築して、それにあわせて $r(t) = \sigma^2 f(t, r(t))^2 / 4$ により $r(t)$ のツリーを構築すればよい。

2.11 まとめ

- ツリーモデルは実装が容易、取束はおおむね $1/N$ のオーダー。
- アメリカンオプションの実装が可能。エキゾチックオプションは場合による。
- 多次元 (3次元以上?) のツリーは計算負荷 (特にメモリの面) が大きく困難。
- 取束は振動するので注意が必要。

*11 Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models, Review of Financial Studies, 1990, vol.3, 393-430

3 有限差分法

有限差分法により偏微分方程式を数值的に解く。ここでは有限差分法を Black-Scholes 偏微分方程式（拡散方程式，熱伝導方程式）

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) + rs \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, s) - rf(t, s) = 0, f(T, s) = h(s), s > 0 \quad (3.1)$$

に適用するが，より一般的な偏微分方程式にも適用することが可能である。

3.0 参考文献

前の章で挙げた本に加えて

- D. Tavella, 『Quantitative Methods in Derivatives Pricing』, John Wiley& Sons
- D. Tavella, C. Randall, 『Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method』, John Wiley& Sons
- R. Seydel, 『Tools for Computational Finance』, Springer
- 高見穎郎, 河村哲也, 『偏微分方程式の差分法』, 東京大学出版会

などが参考になるだろう。

3.1 有限差分法の概要

有限差分法は以下の手順で行う。

- (1) 偏微分方程式 (3.1) の解 $f(t, s)$ の変数 (t, s) が動く空間を状態空間とよぶ。まず，この状態空間を（小さい）長方形に分割する。時間変数 t に関する状態空間は $[0, T]$ 。これを M 等分する（一般には等分でなくてもよい）。つぎに株価変数 s の状態空間を分割する。問題によっては株価変数 s の状態空間が有限でない場合もあるが，その場合も適当な上限 s_{\max} と下限 s_{\min} を設定して， $[s_{\min}, s_{\max}]$ を N 等分する。すると，状態空間が $N \times M$ 個の長方形に分割される。このときできた $(N + 1) \times (M + 1)$ 個の点を格子点とよぶ。状態 (t_i, s_j) に対応する格子点を (i, j) 格子点とよぶことにする。また， $f_{i,j}$ を $f(t_i, s_j)$ の近似値とする。
- (2) 偏微分方程式の境界条件（明示的に示されていない場合もある）から，境界 $(s = s_{\max}, s = s_{\min}, t = T)$ での $f_{i,j}$ の値を定める。たとえば満期時点では $f_{M,j} = h(s_j)$ ($j = 0, 1, \dots, N$) とすればよいだろう。
- (3) 偏微分方程式にあらわれている微分を差分近似する。関数 $f(x)$ の 1 階微分は

$$\begin{aligned} \text{前進差分} &: \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \text{後退差分} &: \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \\ \text{中心差分} &: \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \end{aligned}$$

のいずれかで近似する。2 階微分は

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

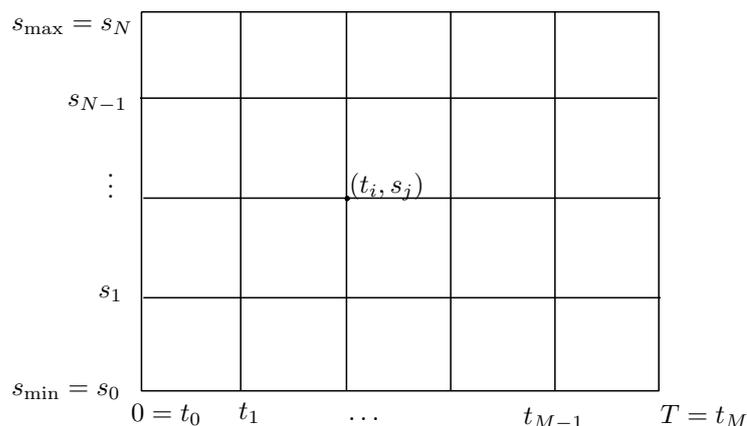


図 3.1 状態空間

と考えると,

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right) / \Delta x = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

で近似する. 例えば, (i, j) 格子点における $\partial f / \partial t$ を前進差分を用いて近似すると

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

となる. ここで, $\Delta t = T/M$. また, $\partial f / \partial s$ を中心差分で近似すると

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta s}$$

となる. ここで, $\Delta s = (s_{\max} - s_{\min})/N$. 差分近似した偏微分方程式をつかって $t = t_i$ における関数

		Δt	
	$f_{i,j+1}$		
Δs	$f_{i,j}$		$f_{i+1,j}$
	$f_{i,j-1}$		

の近似値 $\{f_{i,j}\}_{j=0,\dots,N}$ と $t = t_{i+1}$ における関数の近似値 $\{f_{i+1,j}\}_{j=0,\dots,N}$ を結びつける.

- (4) 差分近似した偏微分方程式を使って, 満期時点から (時間方向に) 後ろ向きに各格子点における関数の値を計算してゆく.

時間に関する 1 階微分の差分近似の取り方によって, いくつかの解法が考えられる. 以下では, $[0, T]$, $[s_{\min}, s_{\max}]$ をそれぞれ M, N 等分し, $\Delta t = T/M$, $\Delta s = (s_{\max} - s_{\min})/N$ とする. よって,

$$t_i = i\Delta t, \quad s_j = s_{\min} + j\Delta s \quad (i = 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N)$$

となる。 s が株価を表す変数の場合には通常 $s_{\min} = 0$ とする。

3.2 陽解法

3.2.1 陽解法

時間に関する微分を後退差分で近似する方法を陽解法とよぶ。いま、時点 t_{i+1} までの各格子点における関数の値が求まったとしよう。このとき、偏微分方程式を t_{i+1} 時点において離散近似する。 t_{i+1} 時点と t_i 時点をつなぐためには、時間に関する1階微分を後退差分で近似する必要がある。また、 s に関する1階微分は中心差分を用いる。以下では、 $s_{\min} = 0$ と仮定する。格子点 $(i+1, j)$ において偏微分方程式を以下のように離散近似する。

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rs_j \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s_j^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta s)^2} - rf_{i+1,j} = 0. \quad (3.2)$$

この式を整理すると

$$f_{i,j} = a_j f_{i+1,j+1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j-1} \quad (3.3)$$

$$a_j = \frac{1}{2}(rj + (\sigma j)^2)\Delta t, \quad b_j = 1 - ((\sigma j)^2 + r)\Delta t, \quad c_j = \frac{1}{2}(-rj + (\sigma j)^2)\Delta t \quad (3.4)$$

となる。

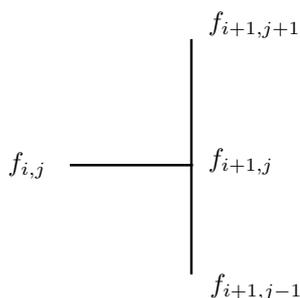


図 3.2 陽解法

境界条件を決める。いま行使価格が K のヨーロピアンコールオプションを考えよう。満期時点における条件は

$$f(t_M, s_j) = \begin{cases} s_j - K, & s_j \geq K \\ 0, & s_j < K \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, N$$

となる。株価変数に関する境界条件のほうは少し考えなければならない。いま、株価が十分に小さければ、コールオプションの価値は 0 に近いはずなので、

$$f(t_i, s_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

とする。一方、株価が十分に大きいとき、プット・コールパリティ^{*12}より

$$f(t, s) \approx s - e^{-r(T-t)}K$$

^{*12}プット・コールパリティとは、 t 時点において株価が s であるときのプットオプション、コールオプションの価値をそれぞれ $p(t, s)$, $c(t, s)$ としたとき

$$c(t, s) - p(t, s) = s - e^{-r(T-t)}K$$

が成り立つことをいう。これより、株価が十分に大きいときプットオプションの価値はゼロになる ($p(t, s) = 0$) ので $c(t, s) = s - e^{-r(T-t)}K$ がいえる。

となるはずなので,

$$f(t_i, s_N) = s_N - e^{-r(T-t_i)}K, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

とする. もしくは $f(t, s) \approx s$ としてもよいだろう^{*13}.

R のサンプルコード.

```

exEcall <- function(r, sigma, T, K, smax, M, N){

  Deltat <- T/M                #時間の刻み幅
  Deltas <- smax/N            #株価の刻み幅

  f <- matrix(0, nrow=M+1, ncol=N+1) #オプション価格行列

#----- 満期におけるオプション価値 -----
  for (j in 1:(N+1)){
    f[M+1, j] <- max((j-1)*Deltas - K, 0) #コールオプション
  }

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
  for (i in M:1){

    f[i, 1] <- 0      #境界条件
    f[i, N+1] <- smax - exp(-r*(T - (i-1)*Deltat))*K

    for (j in 2:N){
      a <- (r*(j-1) + (sigma*(j-1))^2)*Deltat/2
      b <- 1 - ((sigma*(j-1))^2 + r)*Deltat
      c <- (-r*(j-1) + (sigma*(j-1))^2)*Deltat/2

      f[i, j] <- a*f[i+1, j+1] + b*f[i+1, j] + c*f[i+1, j-1]
    }
  }
  return(f[1,])
}

```

$r = 0.1, \sigma = 0.2, K = 60, S_0 = 62, T = 5$ ヶ月のときのコールオプションの現在価格はつぎの通り. ここでは, $s_{\max} = 300$, 時間空間の分割数は $M = 5000$, 株価空間の分割数は $N = 300$ とした.

```

> x <- exEcall(0.1, 0.2, 5/12, 60, 300, 5000, 300)
> x[63]
[1] 5.791898

```

^{*13} $\partial f(t, s)/\partial s = 1$ を s_{\max} における境界条件としてもよい.

時間の分割数を減らすと上手く行かない。たとえば $M = 300$ とすると、

```
> x <- exEcall(0.1,0.2,5/12,60,300,300,300)
> x[63]
[1] 4.071905e+43
```

となる。これはなぜか？

3.2.2 陽解法の安定性について

陽解法の場合、時間空間の刻み幅 Δt と株価空間の刻み幅 Δs が安定性条件とよばれる条件を満たさないと、解 (の絶対値) が非常に大きい値になってしまう。以下で、かなり粗い議論ではあるが安定性条件を導いてみる。

まず、(3.1)において、 $h(s) = (s - K)^+$ (コールオプション) のとき、つぎの変換を施す。

$$s = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad q = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad (3.5)$$

$$f(t, s) = f\left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\tau, x) \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

さらに、 $g(\tau, x)$ を

$$v(\tau, x) = K \exp\left\{-\frac{1}{2}(q-1)x - \left(\frac{1}{2}(q-1)^2 + q\right)\tau\right\} g(\tau, x)$$

とおく。このとき、(3.1) はつぎの偏微分方程式に変換される。

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad y(0, x) = \max\left\{e^{\frac{x}{2}(q+1)} - e^{\frac{x}{2}(q-1)}, 0\right\}. \quad (3.8)$$

時間に関する境界条件が $t = 0$ における条件に変換されるので、時間に関して前向きに解くことに注意せよ。ここで説明を簡単にするため、(3.8) に

$$y(\tau, a) = y(\tau, b) = 0 \quad (a < b)$$

という境界条件を課したものを考える。まず、(3.8) を陽的に差分近似すると

$$g_{i+1,j} = \lambda g_{i,j+1} + (1-2\lambda)g_{i,j} + \lambda g_{i,j-1}, \quad \lambda = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \quad (3.9)$$

となる。時間に関して前向きに解いていくので、前に出てきた表現とは異なることに注意。境界条件より

$$g_{i,0} = g_{i,N} = 0, \quad 1 \leq i \leq M$$

となることに注意すると、(3.9) より $g^{(i)} = (g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,N-1})^T$ ($i = 1, \dots, N$) は

$$g^{(i+1)} = Ag^{(i)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix} \quad ((N-1) \times (N-1) \text{ 行列})$$

という式を満たす.

ここで, $g^{(i)}$ を計算するときに生じる, 計算誤差を

$$e^{(i)} = \bar{g}^{(i)} - g^{(i)}$$

と書く. つまり, 計算誤差がなければ $g^{(i)}$ が正確な値なのだが, 誤差が加わるため, 計算機内では $\bar{g}^{(i)}$ と計算されてしまうと考える. すると,

$$\begin{aligned}\bar{g}^{(1)} &= Ag^{(0)} + e^{(1)} \\ \bar{g}^{(2)} &= A\bar{g}^{(1)} + e^{(2)} = A(Ag^{(0)} + e^{(1)}) + e^{(2)} = A^2g^{(0)} + Ae^{(1)} + e^{(2)} \\ \bar{g}^{(3)} &= A\bar{g}^{(2)} + e^{(3)} = \dots = A^3g^{(0)} + A^2e^{(1)} + Ae^{(2)} + e^{(3)} \\ &\vdots \\ \bar{g}^{(n)} &= A^n g^{(0)} + A^{n-1}e^{(1)} + A^{n-2}e^{(2)} + \dots + e^{(n)}\end{aligned}$$

となる. このとき, $n \rightarrow \infty$ としたとき, 計算誤差 $A^{n-1}e^{(1)}$ などは 0 に近づかなければならない. 一般に下記の命題が知られている.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n z = 0, \forall z \Leftrightarrow \max_i |\mu_i^A| < 1.$$

ここで, μ_i^A は A の固有値. A の固有値は

$$\mu_i^A = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{i\pi}{2N}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

であることが知られている (Seydel の本の Lemma 4.3 など). よって, 計算誤差が 0 に近づくには

$$0 < \lambda \sin^2 \frac{i\pi}{2N} < \frac{1}{2}$$

でなければならない. よって,

$$0 < \lambda < \frac{1}{2}$$

すなわち,

$$0 < \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

であれば, 計算誤差が 0 に近づく. これを安定性条件とよぶ. (3.10) は変換した変数 τ, x についての式なので, もとの変数 t, s の条件ではない. しかし, t, s についてもおよその目安として, 株価空間の刻み幅を細かくするには時間空間の刻み幅をその 2 乗のオーダーで細かくする必要があると理解しておこう. また, 陽解法では Δs を小さくするためには, 同時に Δt も小さくしなければならない. 安定性について詳しいことは, 先に挙げた参考文献を参照せよ.

3.2.3 陽解法とツリーモデルの関係

陽解法 (3.2) において, 左辺最後の項の $f_{i+1,j}$ を $f_{i,j}$ で置き換える. これは, 時間幅を十分細かくとったときには近似として成立するだろう. すると,

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + r s_j \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s_j^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta s)^2} - r f_{i,j} = 0$$

となり, これを変形すると,

$$f_{i,j} = \frac{1}{1+r\Delta t}(a_j f_{i+1,j+1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j-1}) \quad (3.11)$$

$$a_j = \frac{1}{2}(rj + (\sigma j)^2)\Delta t, \quad b_j = 1 - (\sigma j)^2\Delta t, \quad c_j = \frac{1}{2}(-rj + (\sigma j)^2)\Delta t \quad (3.12)$$

となる*14. ここで,

$$a_i + b_i + c_i = 1$$

が成り立つことに注目すると, もし

$$0 < a_i, b_i, c_i < 1 \quad (3.13)$$

であるならば, a_i, b_i, c_i を確率と見なすことができる. さらに, (3.11) の $1/(1+r\Delta t)$ を利子率による割引項とみれば, (3.11) は 3 項ツリーモデルとみなすことができよう. (3.13) が成り立つための条件は

$$(\sigma j)^2\Delta t < 1 \quad (3.14)$$

である. $s_j = j\Delta s$ だから, (3.14) は

$$\sigma^2 \left(\frac{s_j}{\Delta s}\right)^2 \Delta t < 1 \quad (j = 1, \dots, N) \Rightarrow \Delta t < \frac{1}{(\sigma N)^2} \quad (3.15)$$

となる. じつはこれは陽解法 (3.2) の安定性条件にもなっている.

$r = 0.1, \sigma = 0.2, K = 60, S_0 = 62, T = 5$ ヶ月, $s_{\max} = 300, N = 300$ とする. このとき条件 (3.15) は

$$\frac{5}{12} \frac{1}{M} < \frac{1}{(0.2 \cdot 300)^2} \Leftrightarrow M > \frac{5}{12} (0.2 \cdot 300)^2 = 1500$$

となる.

```
> x <- exEcall(0.1,0.2,5/12,60,300,1500,300)
```

```
> x[63]
```

```
[1] 5.79208
```

```
>
```

一方,

```
> x <- exEcall(0.1,0.2,5/12,60,300,1000,300)
```

```
> x[63]
```

```
[1] -5.531582e+68
```

```
>
```

また, $b_j = 0$ すなわち

$$1 - (\sigma j)^2\Delta t = 0 \Leftrightarrow \Delta s = s_j\sigma\sqrt{\Delta t}$$

のとき, 陽解法 (3.2) は 2 項ツリーモデル (CRR モデル) に対応する.

*14 これを陽解法の反復式としている文献もある.

3.3 陰解法

時間に関する微分を前進差分で近似する方法を**陰解法**とよぶ。時点 t_{i+1} までの各格子点における関数の値が求まっているとき、偏微分方程式を時点 t_i において離散近似する方法。 t_i 時点と t_{i+1} 時点をつなぐためには、時間に関する 1 階微分を前進差分で近似する必要がある。

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + r s_j \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s_j^2 \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta s)^2} - r f_{i,j} = 0. \quad (3.16)$$

$s_{\min} = 0$ と仮定したことに注意して、この式を整理すると

$$a_j f_{i,j+1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j-1} = f_{i+1,j} \quad (3.17)$$

$$a_j = \frac{1}{2}(-rj - (\sigma j)^2)\Delta t, \quad b_j = 1 + ((\sigma j)^2 + r)\Delta t, \quad c_j = \frac{1}{2}(rj - (\sigma j)^2)\Delta t \quad (3.18)$$

となる。(3.17) の左辺にある $f_{i,j+1}, f_{i,j}, f_{i,j-1}$ は未知で右辺 $f_{i+1,j}$ は既知である。よって、陽解法と違い陰解法の場合は (3.17) を単独で解くことはできない。

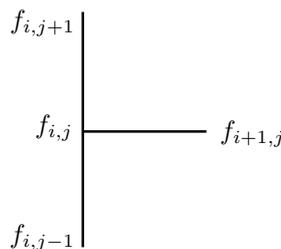


図 3.3 陰解法

つぎの連立方程式を解くことになる。

$$\begin{cases} a_1 f_{i,2} + b_1 f_{i,1} + c_1 f_{i,0} = f_{i+1,1} \\ a_2 f_{i,3} + b_2 f_{i,2} + c_2 f_{i,1} = f_{i+1,2} \\ \vdots \\ a_{N-2} f_{i,N-1} + b_{N-2} f_{i,N-2} + c_{N-2} f_{i,N-2} = f_{i+1,N-2} \\ a_{N-1} f_{i,N} + b_{N-1} f_{i,N-1} + c_{N-1} f_{i,N-2} = f_{i+1,N-1} \end{cases} \quad (3.19)$$

これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_3 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{N-2} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ \vdots \\ f_{i,N-2} \\ f_{i,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i+1,1} - c_1 f_{i,0} \\ f_{i+1,2} \\ f_{i+1,3} \\ \vdots \\ f_{i+1,N-2} \\ f_{i+1,N-1} - a_{N-1} f_{i,N} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

この連立方程式を解くことにより、 $\{f_{i,j}\}_{j=1,\dots,N-1}$ を求める。左辺に現れている行列は 3 重対角行列というもので、この逆行列を求めるよりも、3 重対角行列の性質を使って直接連立方程式を解いた方が効率がよい。ここでは、R の連立方程式を解く機能を使うことにする。R では $Ax = y$ という連立方程式を

```
solve(A,y)
```

という関数で解くことができる。

陰解法によるヨーロッパコールオプション価格の計算。

```
imEcall <- function(r, sigma, T, K, smax, M, N){

  Deltat <- T/M                #時間の刻み幅
  Deltas <- smax/N            #株価の刻み幅

  f <- matrix(0, nrow=M+1, ncol=N+1) #オプション価格行列

#----- 行列の作成 -----
  A <- matrix(0, nrow=N-1, ncol=N-1) #行列の初期化

  a1 <- (-r - sigma^2)*Deltat/2    #a_1
  b1 <- 1 + (sigma^2 + r)*Deltat    #b_1
  c1 <- (r - sigma^2)*Deltat/2     #c_1
  A[1,1] <- b1
  A[1,2] <- a1

  for (j in 2:(N-2)){
    a <- (-r*j - (sigma*j)^2)*Deltat/2
    b <- 1 + ((sigma*j)^2 + r)*Deltat
    c <- (r*j - (sigma*j)^2)*Deltat/2
    A[j,j+1] <- a
    A[j,j] <- b
    A[j,j-1] <- c
  }

  aNm1 <- (-r*(N-1) - (sigma*(N-1))^2)*Deltat/2 #a_N - 1
  bNm1 <- 1 + ((sigma*(N-1))^2+r)*Deltat         #b_N - 1
  cNm1 <- (r*(N-1) - (sigma*(N-1))^2)*Deltat/2  #c_N - 1
  A[N-1,N-1] <- bNm1
  A[N-1,N-2] <- cNm1

#----- 満期におけるオプション価値 -----
  for (j in 0:N){
    f[M+1, j+1] <- max(j*Deltas - K, 0) #コールオプション
  }
}
```

```

#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
x <- numeric(N-1) #左辺のベクトル
y <- numeric(N-1) #右辺のベクトル

for (i in M:1){
  b1 <- 0 #株価空間の境界条件
  bu <- smax - exp(-r*(T - (i-1)*Deltat))*K

  f[i,1] <- b1
  f[i,N+1] <- bu

  y[1:(N-1)] <- f[i+1,2:N]
  y[1] <- y[1] - c1*b1
  y[N-1] <- y[N-1] - aNm1*bu

  x <- solve(A,y) #連立方程式を解く

  f[i,2:N] <- x
}
return(f[1,])
}

```

実行例

```

> x <- imEcall(0.1,0.2,5/12,60,300,300,300)
> x[63]
[1] 5.790527

```

陰解法は Δs , Δt の値によらず、常に安定的であることが知られている。

3.4 Crank-Nicolson 法

差分法の近似精度を見ておく。一般に関数 $f(u)$ をテイラー展開すると

$$f(u \pm \Delta u) = f(u) \pm \frac{\partial f}{\partial u}(u)\Delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)(\Delta u)^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}(u)(\Delta u)^3 + O((\Delta u)^4).$$

よって、

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} + O(\Delta u).$$

前進差分の誤差は $O(\Delta u)$. 同様に, 後進差分の誤差も $O(\Delta u)$. 一方,

$$\frac{f(u + \Delta u) - f(u - \Delta u)}{2} = \frac{\partial f}{\partial u}(u)\Delta u + O((\Delta u)^3)$$

より,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u - \Delta u)}{2\Delta u} + O((\Delta u)^2).$$

よって, 中心差分の誤差は $O((\Delta u)^2)$ であることが分かる. また,

$$f(u + \Delta u) + f(u - \Delta u) = 2f(u) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)(\Delta u^2) + O((\Delta u)^4)$$

より,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{f(u + \Delta u) - 2f(u) + f(u - \Delta u)}{(\Delta u)^2} + O((\Delta u)^2).$$

よって, この方法による 2 階微分の近似の誤差は $O((\Delta u)^2)$. 以上より, 陽解法と陰解法による近似誤差はいずれも

$$O(\Delta t) + O((\Delta s)^2)$$

であることが分かる. 時間に関する微分の近似誤差を $O((\Delta t)^2)$ にできないだろうか?

いま陽解法による反復式をつぎのように変形する.

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rs_j \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s_j^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta s)^2} - rf_{i+1,j} = 0 \quad (3.21)$$

\iff

$$f_{i,j} = a'_j f_{i+1,j+1} + b'_j f_{i+1,j} + c'_j f_{i+1,j-1} \quad (3.22)$$

$$a'_j = \frac{1}{2}(rj + (\sigma j)^2)\Delta t, \quad b'_j = 1 - ((\sigma j)^2 + r)\Delta t, \quad c'_j = \frac{1}{2}(-rj + (\sigma j)^2)\Delta t.$$

陰解法による反復式をつぎのように変形する.

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rs_j \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s_j^2 \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta s)^2} - rf_{i,j} = 0 \quad (3.23)$$

\iff

$$a_j f_{i,j+1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j-1} = f_{i+1,j} \quad (3.24)$$

$$a_j = \frac{1}{2}(-rj - (\sigma j)^2)\Delta t, \quad b_j = 1 + ((\sigma j)^2 + r)\Delta t, \quad c_j = \frac{1}{2}(rj - (\sigma j)^2)\Delta t.$$

(3.21) と (3.23) の各辺を足して 2 で割ると,

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{2}rs_j \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta s} + \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta s} \right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sigma^2 s_j^2 \left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta s)^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta s)^2} \right) - \frac{1}{2}r(f_{i+1,j} + f_{i,j}) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.25) は t_{i+1} までの各格子点における値が与えられたときの, $t_i + \Delta t/2$ における偏微分方程式の差分近似とみなすことができる. 実際 (3.25) の第 1 項は

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t + \Delta t/2, s) \approx \frac{f(t + \Delta t/2 + \Delta t/2, s) - f(t + \Delta t/2 - \Delta t/2, s)}{2 \cdot \Delta t/2} = \frac{f(t + \Delta t, s) - f(t, s)}{\Delta t}$$

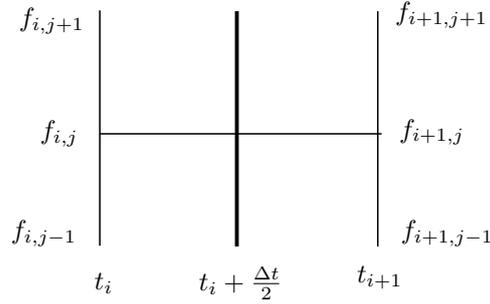


図 3.4 Crank-Nicolson 法

より、時刻 $t_i + \Delta t/2$ における時間に関する 1 階微分の中央差分近似であることが分かる。中央差分の誤差は $O((\Delta t)^2)$ であった。また (3.25) の第 2 項の差分は s に関する 1 階微分

$$\frac{\partial f}{\partial s} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, s \right)$$

の近似である。実際、

$$\frac{\partial f}{\partial s} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \pm \frac{\Delta t}{2}, s \right) = \frac{\partial f}{\partial s} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, s \right) \pm \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, s \right) \right) \frac{\Delta t}{2} + O((\Delta t)^2)$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial s} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, s \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(t + \Delta t, s) + \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) \right) + O((\Delta t)^2)$$

となっている。他の項も同様に評価ができる。よって、(3.25) による近似の誤差は

$$O((\Delta t)^2) + O((\Delta s)^2)$$

であることが分かる。

(3.25) を整理すると (実際には、(3.22) と (3.24) の両辺を足して 2 で割った方が簡単)、

$$a_j f_{i,j+1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j-1} = -a_j f_{i+1,j+1} - d_j f_{i+1,j} - c_j f_{i+1,j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

$$a_j = \frac{1}{4}(-rj - (\sigma j)^2)\Delta t, \quad b_j = 1 + \frac{1}{2}((\sigma j)^2 + r)\Delta t, \quad c_j = \frac{1}{4}(rj - (\sigma j)^2)\Delta t, \quad d_j = b_j - 2$$

となる。これを行列表示すると

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_3 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{N-2} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ \vdots \\ f_{i,N-2} \\ f_{i,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 f_{i+1,2} - d_1 f_{i+1,1} - c_1 f_{i+1,0} - c_1 f_{i,0} \\ -a_2 f_{i+1,3} - d_2 f_{i+1,2} - c_2 f_{i+1,1} \\ -a_3 f_{i+1,4} - d_3 f_{i+1,3} - c_3 f_{i+1,2} \\ \vdots \\ -a_{N-2} f_{i+1,N-1} - d_{N-2} f_{i+1,N-2} - c_{N-2} f_{i+1,N-3} \\ -a_{N-1} f_{i+1,N} - d_{N-1} f_{i+1,N-1} - c_{N-2} f_{i+1,N-2} - a_{N-1} f_{i,N} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

R のサンプルコード.

```

CrankNicolson <- function(r, sigma, T, K, smax, M, N){

  Deltat <- T/M                #時間の刻み幅
  Deltas <- smax/N            #株価の刻み幅

  f <- matrix(0, nrow=M+1, ncol=N+1) #オプション価格行列
#----- 係数の定義-----
  a <- function(j){
    return((-r*j - (sigma*j)^2)*Deltat/4)
  }

  b <- function(j){
    return(1 + ((sigma*j)^2 + r)*Deltat/2)
  }

  c <- function(j){
    return((r*j - (sigma*j)^2)*Deltat/4)
  }

  d <- function(j){
    return(b(j)-2)
  }
#----- 行列の作成 -----
  A <- matrix(0, nrow=N-1, ncol=N-1) #行列の初期化

  A[1,1] <- b(1)
  A[1,2] <- a(1)

  for (j in 2:(N-2)){
    A[j,j+1] <- a(j)
    A[j,j] <- b(j)
    A[j,j-1] <- c(j)
  }

  A[N-1,N-1] <- b(N-1)
  A[N-1,N-2] <- c(N-1)
#----- 満期におけるオプション価値 -----
  for (j in 0:N){

```

```

    f[M+1, j+1] <- max(j*Deltas - K, 0) #コールオプション
  }
#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
x <- numeric(N-1) #左辺のベクトル
y <- numeric(N-1) #右辺のベクトル

for (i in (M-1):0){
  b1 <- 0 #株価空間の境界条件
  bu <- smax - exp(-r*(T - i*Deltat))*K
#---- y ベクトルの生成 ----
  for (j in 1:(N-1)){
    y[j] <- -a(j)*f[i+2,j+2] - d(j)*f[i+2,j+1] - c(j)*f[i+2,j]
  }
  y[1] <- y[1] - c(1)*b1
  y[N-1] <- y[N-1] - a(N-1)*bu
#-----
  f[i+1,1] <- b1
  f[i+1,N+1] <- bu

  x <- solve(A,y) #連立方程式を解く
  f[i+1,2:N] <- x
}
return(f[1,])
}

```

実行例

```

> x <- CrankNicolson(0.1,0.2,5/12,60,200,200,200)
> x[63]
[1] 5.791823

```

Crank-Nicolson 法は常に安定的であることが知られている。

3.5 リスク指標

オプションのデルタ $\partial f / \partial S_0$ を求めるには、中心差分近似

$$\frac{f(s + \Delta s, t) - f(s - \Delta s, t)}{2\Delta s}$$

を用いればよい。すなわち格子点 $f_{0,i}$ におけるデルタは

$$\frac{f_{0,i+1} - f_{0,i-1}}{2\Delta s}$$

を計算すればよい。

Black-Scholes モデルにおいて $r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $S_0 = 62, K = 60$ のときのコールオプションのデルタは 0.7393. 数値解は以下のとおり.

```
> x <- CrankNicolson(0.1,0.2,5/12,60,200,200,200)
> x[63]
[1] 5.791823
> (x[64]-x[62])/2
[1] 0.7391232
> i <- 2:100
> delta <- (x[i+1] - x[i-1])/2
> plot(delta,type="l",xlab="Stock Price", ylab="Delta")
```

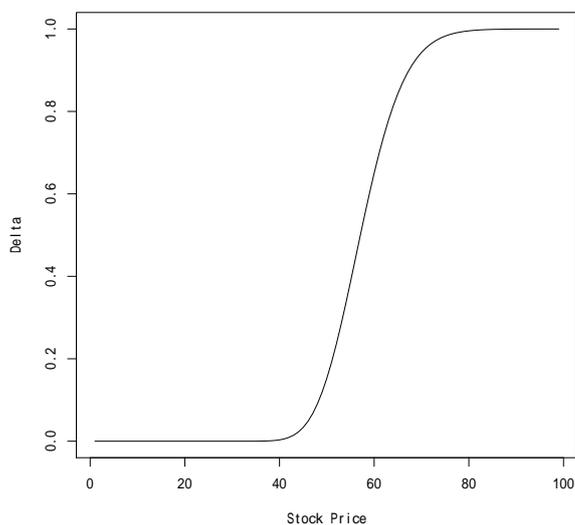


図 3.5 Crank-Nicolson 法によるデルタの近似

3.6 アメリカンオプションの評価

アメリカンオプションの価格は

$$f(t, s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, T]}} E \left[e^{-r(\tau-t)} h(S(\tau)) \mid S(t) = s \right]$$

で与えられる. このとき f はつぎの偏微分不等式を満たすことが知られている.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) + rs \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, s) - rf(t, s) &\leq 0, \quad f(t, s) \geq h(s), \quad (t, s) \in [0, T] \times [0, \infty) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) + rs \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, s) - rf(t, s) \right) (f(t, s) - h(s)) &= 0, \quad (t, s) \in [0, T] \times [0, \infty) \\ f(T, s) &= h(s) \end{aligned} \tag{3.27}$$

詳しくは, Lamberton and Lapeyre の本を参照せよ. この偏微分不等式を離散近似して解くこともできるが, もっと簡単にヨーロピアンオプションの後ろ向きアルゴリズムの中で

$$f_{i,j} \leftarrow \max(h(s_j), f_{i,j}) \quad (3.28)$$

とすればよいことが知られている.

R のサンプルコード. `pmax(x,y)` はベクトル `x, y` の各成分の `max` をベクトルとして返す関数.

```
imAput <- function(r, sigma, T, K, smax, M, N){

  Deltat <- T/M          #時間の刻み幅
  Deltas <- smax/N       #株価の刻み幅

  f <- matrix(0, nrow=M+1, ncol=N+1) #オプション価格行列
#----- 行列の作成 -----
  A <- matrix(0, nrow=N-1, ncol=N-1) #行列の初期化

  a1 <- (-r - sigma^2)*Deltat/2      #a_1
  b1 <- 1 + (sigma^2 + r)*Deltat      #b_1
  c1 <- (r - sigma^2)*Deltat/2      #c_1
  A[1,1] <- b1
  A[1,2] <- a1

  for (j in 2:(N-2)){
    a <- (-r*j - (sigma*j)^2)*Deltat/2
    b <- 1 + ((sigma*j)^2 + r)*Deltat
    c <- (r*j - (sigma*j)^2)*Deltat/2
    A[j,j+1] <- a
    A[j,j] <- b
    A[j,j-1] <- c
  }

  aNm1 <- (-r*(N-1) - (sigma*(N-1))^2)*Deltat/2 #a_N - 1
  bNm1 <- 1 + ((sigma*(N-1))^2+r)*Deltat          #b_N - 1
  cNm1 <- (r*(N-1) - (sigma*(N-1))^2)*Deltat/2  #c_N - 1
  A[N-1,N-1] <- bNm1
  A[N-1,N-2] <- cNm1
#----- 満期におけるオプション価値 -----
  for (j in 0:N){
    f[M+1, j+1] <- max(K - j*Deltas, 0) #プットオプション
  }
#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
```

```

x <- numeric(N-1) #左辺のベクトル
y <- numeric(N-1) #右辺のベクトル

payoff <- pmax(K - seq(0, N*Deltas, Deltas), 0) #支払い

for (i in (M-1):0){
  b1 <- exp(-r*(T - i*Deltat))*K #株価空間の境界条件
  bu <- 0

  f[i+1,1] <- b1
  f[i+1,N+1] <- bu

  y[1:(N-1)] <- f[i+2,2:N]
  y[1] <- y[1] - c1*b1
  y[N-1] <- y[N-1] - aNm1*bu

  x <- solve(A,y) #連立方程式を解く
  f[i+1,2:N] <- x

  f[i+1,] <- pmax(payoff, f[i+1,]) #アメリカン. ここだけがヨーロッパアンとのちがい
}
return(f[1,])
}

```

実行例

```

> x <- imAput(0.1,0.2,5/12,60,100,100,100)
> x[63]
[1] 1.487975
> plot(x,type="l")
>

```

(3.28) のアルゴリズムによって、偏微分不等式 (3.27) の解が近似できることが証明されている。詳細は Lamberton and Lapeyre の本、または、P. Jaillet, D Lamberton, and B Lapeyre, “Variational Inequalities and the Pricing of American Options”, Acta Applicandae Mathematicae, 21(1990) 263–289, を参照せよ。他にも (3.27) の数値解法が研究されている。Tavella and Randall の本をみるとよい。

3.7 バリアオプションの評価

通常のコールやプットオプション契約に、株価がある値に到達すればオプション契約が発生（ノックイン）もしくは消滅（ノックアウト）といった付帯条件を付けたオプションを**バリアオプション**とよぶ。バリアがな

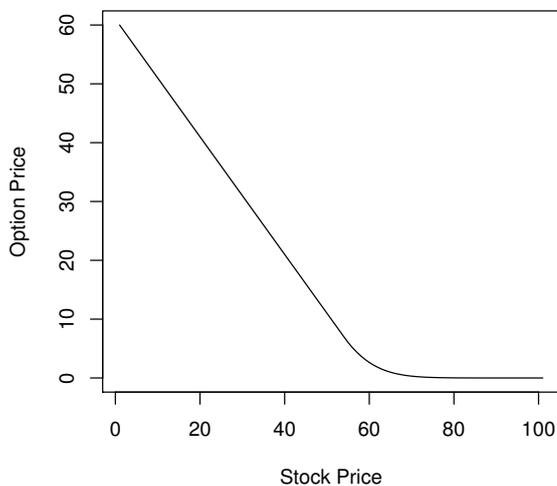


図 3.6 陰解法によるアメリカンプットオプションの価格

い場合の支払い関数を h としたとき，バリアオプションの支払いはつぎのように書ける． A をバリアのレベルとする．

アップアンドアウト $h(S(T))1_{(-\infty, A)}(\max_{0 < t < T} S(t))$

ダウンアンドアウト $h(S(T))1_{(A, \infty)}(\min_{0 < t < T} S(t))$

アップアンドイン $h(S(T))1_{(A, \infty)}(\max_{0 < t < T} S(t))$

ダウンアンドイン $h(S(T))1_{(-\infty, A)}(\min_{0 < t < T} S(t))$

ここで，区間 (a, b) に対して，

$$1_{(a, b)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

である．他にもバリアレベル A が時間に依存する関数であったり，2つのバリアを考えるものもある．

例として，アップアンドアウトコールオプションを見てみる．支払い関数は

$$(S(T) - K)^+ 1_{(-\infty, A)} \left(\max_{0 < t < T} S(t) \right)$$

となる．よって，オプション価格は

$$V_0 = E \left[(S(T) - K)^+ 1_{(-\infty, A)} \left(\max_{0 < t < T} S(t) \right) \right] \quad (3.29)$$

となる．(3.29)の期待値を計算するには(リスク中立確率のもとでの) $(S(T), \max_{0 < t < T} S(t))$ の同時分布が分かればよい．実際，この同時分布は具体的に求めることができ，それを用いて(3.29)の期待値が計算できる．つまり，アップアンドアウトコールオプションの解析解を導くことができる．Shreveの本などを参照せ

よ、アップアンドアウトコールオプションの価格が満たす偏微分方程式はつぎの通り。

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) + rs \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, s) - rf(t, s) = 0, \quad (t, s) \in [0, T) \times [0, A) \quad (3.30)$$

$$v(t, A) = 0 \quad t \in [0, T) \quad (3.31)$$

$$v(T, s) = (s - K)^+. \quad (3.32)$$

通常の Black-Scholes 偏微分方程式に $v(t, A) = 0$ という境界条件がついたものになっている。(3.7)の有限差分法による解法は、これまでの方法とほとんど同じで、唯一(3.31)の境界条件に気をつければよい。具体的には、株価空間を分割する際 $s_{\min} = 0, s_{\max} = A$ として、満期以外における s_{\max} でのオプション価値を 0 とすればよい。

3.8 境界条件について

境界条件の与え方に決まった方法はない。とくに変数が動く範囲が非有界の場合は注意が必要になる。境界条件を関数の値で与える条件を Dirichlet 条件、関数の傾きで与える条件を Neumann 条件という。コールオプションの場合、Dirichlet 条件としては

$$\begin{cases} V(t, S) = 0 & S \approx 0 \\ V(t, S) = S - Ke^{-r(T-t)} & S \approx \infty \end{cases}$$

が考えられる。2番目の条件は $V(t, S) = S$ でもよいだろう。Neumann 条件としては

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S} = 0 & S \approx 0 \\ \frac{\partial V}{\partial S} = 1 & S \approx \infty \end{cases}$$

が考えられる。

3.9 変数変換

偏微分方程式(3.1)を直接解くよりも、 $x = \log(s)$ と変換した偏微分方程式を解いたほうが、数値解法が単純になり安定性の条件も確認しやすくなる。 $g(t, x) = f(t, e^x)(= f(t, s))$ とおくと、 g は偏微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) - rg(t, x) = 0, \quad g(T, x) = (e^x - K)^+ \quad (3.33)$$

を満たす。各微分項の係数が定数になっていることに注意。 s は資産価格なので x は $-\infty$ から ∞ の値をとる。離散近似をする際 x の下限をうまく設定する必要があることに気をつける。

4 モンテカルロ法

4.1 モンテカルロ法の基礎

確率変数または確率過程の振る舞いを乱数を用いて近似する方法をモンテカルロ法と呼ぶ。

4.1.1 モンテカルロ法の原理

確率変数 X の期待値 $E[X]$ をモンテカルロ法と呼ばれる手法により数値的に計算することを考える。モンテカルロ法の理論的根拠は**大数の法則**と**中心極限定理**である。

定理 (大数の(強)法則) X_1, X_2, \dots を互いに独立で同一の分布にしたがう確率変数とする。 $E[X_1] = \mu (< \infty)$, $V[X_1] < \infty$ ならば

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \text{ a.s. as } n \rightarrow \infty. \quad (\text{概収束})$$

大数の法則には他にもいろいろな形がある。

定理 (中心極限定理) X_1, X_2, \dots を互いに独立で同一の分布にしたがう確率変数とする。 $E[X_1] = \mu (< \infty)$, $V[X_1] = \sigma^2 (< \infty)$ ならば

$$P \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \leq x \right] \rightarrow N(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

ここで、 N は標準正規分布の分布関数。

中心極限定理にも他にいろいろな形がある。

X_1, X_2, \dots, X_n を互いに独立で X と同一の分布にしたがう確率変数とし (これを X_1, X_2, \dots, X_n は X からの無作為標本であるという。), $E[X] = \mu$ とおく。このとき、 X_1, X_2, \dots, X_n の標本平均

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.1)$$

を μ の推定量 (確率変数) とする。大数の法則より

$$\bar{X}_n \rightarrow \mu \text{ a.s. as } n \rightarrow \infty$$

となる。よって、十分大きい n に対して \bar{X}_n を計算し、それを $E[X]$ の近似値とすればよいと考えられる。また、推定量 (4.1) は推定量のよさの基準の1つである不偏性を満たす。実際、

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \mu$$

である。では、 n はどのくらい大きくとればよいのだろうか。また、 \bar{X}_n の誤差はどの程度か。推定量 \bar{X}_n のよさのもう一つの基準は \bar{X}_n の標準偏差 (分散) である。 \bar{X}_n の標準偏差が小さいほどよい推定量だと考える。 \bar{X}_n の分散 e^2 を計算すると

$$e^2 = E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = V \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \quad (4.2)$$

となる。ここで、 $\sigma_X = V[X_1]$ である。この e は \bar{X}_n と μ の平均 2 乗誤差を表す。すなわち、

$$e = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

が平均 2 乗誤差である。これより、誤差は $O(1/\sqrt{n})$ のオーダーで減少することが分かる。

実際には σ_X は未知のことが多い。この場合、 σ_X を標本標準偏差

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$$

で置き換える。よって、モンテカルロ法における \bar{X}_n の誤差は

$$\frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

となる。中心極限定理より n が十分大きいとき

$$P \left[\left| \frac{\bar{X}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \right| < x \right] \approx N(x) - N(-x) \Leftrightarrow P \left[|\bar{X}_n - \mu| < \frac{s_n}{\sqrt{n}} x \right] \approx N(x) - N(-x)$$

となる。よって、 $(1 - \delta)$ 信頼区間は $1 - N(z_{\delta/2}) = \delta/2$ とすると

$$\left(\bar{X}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} z_{\delta/2}, \bar{X}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} z_{\delta/2} \right)$$

となる。例えば、95% の確率で $|\bar{X}_n - \mu| \leq 0.01$ としたければ、 $\delta = 0.05(5\%)$ のとき、 $z_{\delta/2} \approx 1.96$ だから、

$$\frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot 1.96 \leq 0.01$$

となるまで n を増やせばよい。

4.1.2 次元の問題

数値積分を考えよう。いま、積分

$$\int_0^1 f(x) dx \tag{4.3}$$

を計算したいとする。 X を一様分布 $U(0, 1)$ にしたがる確率変数とすれば、(4.3) は $E[f(X)]$ に等しいから、これはモンテカルロ法により計算することができる。 d 次元 ($d \geq 2$) の場合、

$$\int_{[0,1]^d} f(x) dx \tag{4.4}$$

を計算したければ、 d 次元一様分布 $U([0, 1]^d)$ にしたがる確率変数を X として $E[f(X)]$ を求めればよい。次元を増やしてもモンテカルロ法による誤差のオーダーは次元 d に依存せず、常に $O(1/\sqrt{n})$ である。

一方、(4.3) を通常の求積法 (例えば台形則) で求めるには、 $[0, 1]$ を m 分割し $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ とし、適当な重み w_0, w_1, \dots, w_m を選んで

$$\sum_{i=0}^m w_i f(x_i)$$

とすればよい。1次元の場合誤差のオーダーは $O(1/m^2)$ であることが知られている。 d 次元の場合は、 $[0, 1]^d$ を m 分割して

$$\sum_{i_1=0}^{m^{1/d}} \sum_{i_2=0}^{m^{1/d}} \cdots \sum_{i_d=0}^{m^{1/d}} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_d} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_d})$$

とする。このとき誤差のオーダーは $O(1/m^{2/d})$ となることが知られている。よって、次元 d が大きくなるほど、 m を増加させても誤差のオーダーが減少しなくなる^{*15}。誤差のオーダーが次元に依存しない点が、モンテカルロ法の長所である。

4.1.3 推定量の偏り

モンテカルロ法では X と同じ分布にしたがう互いに独立な標本 X_1, X_2, \dots, X_n を発生させ、 $E[X]$ の推定量を $1/n \sum_{i=1}^n X_i$ とした。これは不偏推定量であった。しかし、 X の分布が明示的には分からない場合がある。例えば、 X が確率微分方程式

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) \quad (4.5)$$

にしたがっているが、この解が明示的に求まらない場合がある。こういった場合、(4.5) を離散近似することになる。例えば、Euler-丸山近似を用いると

$$X((j+1)\Delta t) = X(j\Delta t) + \mu(X(j\Delta t))\Delta t + \sigma(X(j\Delta t))\sqrt{\Delta t}Z_{j+1}$$

となる。ここで、 $\Delta t = T/N$ である (N は $[0, T]$ の分割数)。この離散近似で得られた $X(T)$ を $X^N(T)$ と書く。 $X(T)$ の近似として十分大きい N に対する $X^N(T)$ をとることにする。

つぎに、 $E[X^N(T)]$ をモンテカルロ法によって計算するには、 $X_1^N, X_2^N, \dots, X_n^N$ を $X^N(T)$ からの無作為標本とし、推定量を

$$\bar{X}_n^N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^N$$

とすればよい。しかし、これは $E[X^N(T)]$ の不偏推定量ではあるが $E[X(T)]$ のそれではない。 $E[X^N(T)]$ には確率微分方程式の離散近似による誤差が含まれている。よって、モンテカルロ法の効率を上げるには、確率微分方程式の解 $X(T)$ (または $E[X(T)]$) を効率よく近似することが必要となる。これは後で取り上げる。

つぎの例として、株価の分布は明示的に分かるが、支払いの分布が明示的には分からない場合を見てみる。統計量

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt \quad (4.6)$$

に対して、 $(\bar{S} - K)^+$ という支払いをもつアジアンコールオプションを考える。このとき、たとえ $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_n)$ の標本を発生させることができたとしても、 \bar{S} を正確には計算することができない場合がある (計算できない場合がほとんど)。よって、(4.6) を適当な $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ に対して

$$\bar{S}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m S(t_j)$$

^{*15} $d \leq 4$ ならば通常の求積法のほうがよさそうである。

と近似することになる。よって、 $E[(\bar{S}_m - K)^+]$ を $E[(\bar{S} - K)^+]$ の近似値として計算することになる。ここには支払い関数の離散化による誤差が含まれる。よって、モンテカルロ法でこういった支払いをもつオプションの価格付けをする際には、支払い関数の離散化による誤差を小さくする必要がある。

その他では、モンテカルロ法でアメリカンオプションを評価する際にも、偏りに注意する必要がある。

いま、 \bar{X} を $\mu = E[X]$ の推定量とすると平均 2 乗誤差は

$$e^2 = E[(\bar{X} - \mu)^2] = E[(\bar{X} - E[\bar{X}])^2] + (E[\bar{X}] - \mu)^2 = V[\bar{X}] + (\bar{X} \text{の偏り})^2.$$

もし、 \bar{X} が不偏推定量ならば第 1 項は 0 になり、第 2 項目は s^2/n となる (s は X の標準偏差)。不偏推定量でなければ \bar{X} の分散を小さくすることに加えて、 $E[\bar{X}]$ をなるべく $E[X]$ に近づけることが求められる。

4.1.4 乱数

モンテカルロ法では期待値を計算したい確率変数の無作為標本が必要となる。これらの標本を計算機上で乱数を発生させることによって得たいのだが、純粋な意味での乱数を計算機上で発生させることは不可能である。通常は計算機上で疑似的な乱数（擬似乱数）を発生させる。あとで述べるように、任意の分布にしたがう乱数列は一様乱数列から生成できるので、一様乱数列をどのように発生させるかが問題となる。現状では松本-西村 (1998)^{*16}によるメルセンヌ・ツイスタ (Mersenne Twister) とよばれる発生法がもっともよいようである。R ではオプションに何も指定しなければ関数 `runif()` によって、メルセンヌ・ツイスタによる一様乱数列を得ることができる。

任意の分布にしたがう乱数列を得たい場合には、たとえばつぎのようにする。まず、一般論として確率変数が X が一様分布 $U[0, 1]$ にしたがうとき、確率変数 $F^{-1}(X)$ の分布関数は F となる。実際、

$$P(F^{-1}(X) < x) = P(X < F(x)) = F(x)$$

である。よって、一様乱数列と分布関数の逆関数 F^{-1} から任意の分布にしたがう乱数列を発生させることができる。ただし、 F^{-1} が陽的に求まらない場合には（たとえば正規分布）何らかの近似法が必要となる。前に挙げた参考書を参照せよ。R では各種分布にしたがう乱数列を発生する関数が用意されている。たとえば、正規分布にしたがう乱数は `rnorm()` によって発生させることができる。

乱数の詳細については Glasserman 第 2 章を参照のこと。

4.1.5 ヨーロピアンコールオプション

株価過程が (リスク中立確率のもとで) 幾何ブラウン運動

$$dS(t) = S(t)[r dt + \sigma dW(t)] \quad (4.7)$$

にしたがう場合の、ヨーロピアンコールオプション $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$ の価格をモンテカルロ法により求める。まず、(4.7) の解が

$$S(T) = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W(T) \right\} = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right\}$$

であることから、 $S(T)$ の分布が対数正規分布にしたがうことに注意する。ここで、 Z は標準正規分布にしたがう確率変数である。

^{*16}<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/mt.html>

- (1) $i = 1, 2, \dots, n$ について (1)-(4) の計算をする.
- (2) 正規乱数 Z_i を発生させる.
- (3) $S^i(T) = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma\sqrt{T}Z_i \right\}$ により標本 $S^i(T)$ を発生させる.
- (4) $V_i = e^{-rT}(S^i(T) - K)^+$ を計算.
- (5) 最後に, $\bar{V} = (V_1 + V_2 + \dots + V_n)/n$ を計算.

R のコードは以下のとおり.

```
MCBScall <- function(r, sigma, T, K, S0){

  #r: 利子率
  #sigma: ボラティリティ
  #T: 満期
  #K: 行使価格
  #S0: 現在の株価

  N <- 100000   #生成する標本の数

  value <- numeric(N) #初期化
  S <- numeric(N)

  for (i in 1:N){
    S[i] <- S0 * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T + sigma * sqrt(T) * rnorm(1))
    value[i] <- exp(-r*T)*max(S[i] - K, 0)
  }
  return(mean(value))
}
```

例えば, $r = 0.1, S_0 = 62, K = 60, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月 ときのコールオプションの現在価格は

```
> MCBScall(0.1,0.2,5/12,60,62)
[1] 5.789784
>
```

Black-Scholes 式によれば正確な値は 5.798 である.

ただし, 実際にはつぎのようなプログラムのほうがよい.

```
MCBScall2 <- function(r, sigma, T, K, S0){

  N <- 100000
  rnd <- rnorm(N)
```

```

S <- S0 * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T + sigma * sqrt(T) * rnd)
return(mean(exp(-r*T) * pmax(S - K, 0)))
}

```

4.1.6 アジアンオプション

経路依存型オプションであるアジアンコールオプションの価格をモンテカルロ法により求めてみる。ここでは、ある定められた時刻 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ について

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j)$$

という統計量に対し、 $(\bar{S} - K)^+$ という支払いをもつオプションを考える。オプション価格は $E[e^{-rT}(\bar{S} - K)^+]$ により求まる。この期待値をモンテカルロ法で求めるには $(S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_m))$ の同時分布が必要となる。(4.7)が

$$S(t_j) = S(t_{j-1}) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_j - t_{j-1}) + \sigma \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_j \right\}$$

と書けることを使う。ここで $\{Z_j\}$ は互いに独立な正規分布にしたがう確率変数。

- (1) $i = 1, 2, \dots, n$ について (1)-(5) の計算をする。
- (2) 正規乱数 Z_j^i ($j = 1, \dots, m$) を発生させる。
- (3) $S^i(t_j) = S^i(t_{j-1}) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_j - t_{j-1}) + \sigma \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_j^i \right\}$ により $S^i(t_j)$ ($j = 1, \dots, m$) をシミュレーション。
- (4) $\bar{S}^i = (S^i(t_1) + S^i(t_2) + \dots + S^i(t_m))/m$ を計算。
- (5) $V_i = e^{-rT}(\bar{S}^i - K)^+$ を計算。
- (6) 最後に、 $\bar{V} = (V_1 + V_2 + \dots + V_n)/n$ を計算。

```

AsianCall <- function(r, sigma, T, K, S0, M){

  # M: [0, T] の分割数
  N <- 10000    #シミュレーション回数

  Deltat <- T/M    #時間間隔

  value <- numeric(N)

  for (i in 1:N){
    S <- numeric(M+1)
    S[1] <- S0
    for (j in 1:M){

```

```

    S[j+1] <- S[j]*exp((r-0.5*sigma^2)*Deltat + sigma*sqrt(Deltat)*rnorm(1))
  } #パスの生成
  SA <- mean(S) #算術平均をとる
  value[i] <- exp(-r*T)*max(SA - K, 0)
}
return(mean(value))
}

```

4.2 分散減少法

確率変数 Y の期待値 $E[Y]$ をモンテカルロ法で計算するとき、その誤差は

$$\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$$

で計算できた。 n は標本数、 σ_Y は Y の標準偏差。通常は σ_Y は Y の標本標準偏差とする。 σ_Y を小さくする方法を**分散減少法**とよぶ。ここでは、制御変数法、対称変数法、層別抽出法を説明する。その他の方法については Glasserman の本を参照せよ。

4.2.1 制御変数法

確率変数 Y の期待値 $E[Y]$ をモンテカルロ法により求めることを考える。いま、別の確率変数 X の期待値 $E[X]$ が計算できているとする（解析解による正確な値のほうがよいが、近似値でも構わない）。このとき (X_i, Y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) を (X, Y) の無作為標本したときに、適当な定数 b に対して

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - E[X_i])$$

という変数を作る。 $Y_i(b)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の標本平均は

$$\bar{Y}(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - E[X])) = \bar{Y} - b(\bar{X} - E[X])$$

となる。 $\bar{Y}(b)$ は $E[Y]$ の不偏推定量である。実際、

$$E[\bar{Y}(b)] = E[\bar{Y} - b(\bar{X} - E[X])] = E[\bar{Y}] = E[Y] \quad (\bar{Y} \text{ は } Y \text{ の不偏推定量}).$$

b を上手く決めることによって $\bar{Y}(b)$ の分散が \bar{Y} よりも小さくなるようにしたい。まず、 $Y_i(b)$ の標準偏差 $\sigma_Y(b)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2(b) &= V[Y_i(b)] = V[Y_i - b(X_i - E[X])] = V[Y_i] + V[b(X_i - E[X])] - 2b\text{Cov}(Y_i, X_i - E[X]) \\ &= \sigma_Y^2 + b^2\sigma_X^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。ここで、 $\sigma_X^2 = V[X]$ 、 $\sigma_Y^2 = V[Y]$ 、 ρ_{XY} は X, Y の相関係数。よって、

$$b^2\sigma_X^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < \frac{\sigma_Y}{2\sigma_X}\rho_{XY}, & \rho_{XY} > 0 \\ \frac{\sigma_Y}{2\sigma_X}\rho_{XY} < b < 0, & \rho_{XY} < 0 \end{cases}$$

であれば $\sigma_Y(b) < \sigma_Y$ となる。このときは、 \bar{Y} の代わりに $\bar{Y}(b)$ を計算した方が誤差が小さい。また、

$$b = b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V[X]}$$

としたときに $\sigma_Y(b)$ は最も小さくなる. $V[\bar{Y}(b^*)]$ と $V[\bar{Y}]$ を比べてみると

$$\frac{V[\bar{Y}(b^*)]}{V[\bar{Y}]} = \frac{\sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)/n}{\sigma_Y^2/n} = 1 - \rho_{XY}^2.$$

よって, X と Y の相関が 1 または -1 に近いほど分散の減少効果が得られることになる.

この X を**制御変数**とよぶ. 制御変数 X には Y と同じような動きをするものを選ぶ. b^* は通常は未知なので, 標本から得られる値で置き換える. すなわち,

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (4.9)$$

で置き換える. じつは (4.9) は標本 (Y_1, \dots, Y_n) を (X_1, \dots, X_n) に回帰したときの回帰係数に他ならない. 回帰分析と分散減少法の関係については Glasserman を参照せよ.

制御変数法の効果を見るため, Black-Scholes モデルにおいてヨーロピアンコールオプションの価格を求めてみる. 求めたい値は $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$ で, 制御変数を原資産価格 $S(T)$ とする. リスク中立確率の性質 (定義) から

$$E[e^{-rT}S(T)] = S(0) \Leftrightarrow E[S(T)] = e^{rT}S(0)$$

であることを使う. よって,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e^{-rT}(S^i(T) - K)^+ - b^*(S^i(T) - e^{rT}S(0))]$$

として, $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$ を計算する. ここで, $S^i(T)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は $S(T)$ と同じ分布をもつ無作為標本である. R のコード例.

```
CVEcall <- function(r, sigma, T, K, S0){
  N <- 100000 #生成する標本の数

  S <- S0 * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T + sigma * sqrt(T) * rnorm(N)) #S(T) の標本
  Y <- exp(-r * T) * pmax(S - K, 0) #支払いの現在価値の標本
  b <- cov(S, Y) / var(S)
  Yb <- Y - b * (S - exp(r * T) * S0) #Y から制御変数を引いたもの

  return(mean(Yb)) #mean() で標本平均を計算
}
```

$r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $K = 60, S_0 = 62$ としたときの, 単純なモンテカルロ法と制御変数法を用いたモンテカルロ法との比較を図 4.1 に示す. 解析解はおよそ 5.798 である.

つぎに (離散型) アジアンオプション^{*17} の価格を求めてみる. $T = 1, n = 250, t_i = i/M$ ($i = 0, 1, \dots, M$)

^{*17}Jarrow and Protter (“A short history of stochastic integration and mathematical finance. The early years, 1880-1970.” In The Herman Ruben Festschrift, 75-91. IMS Lecture Notes 45, 2004) によると, オプションの形容詞に地名を付けたのは Samuelson が最初らしい. 以下, Jarrow and Protter (2004) からの引用.

This is the paper that first coined the terms “European” and “American” options. According to a private commu-

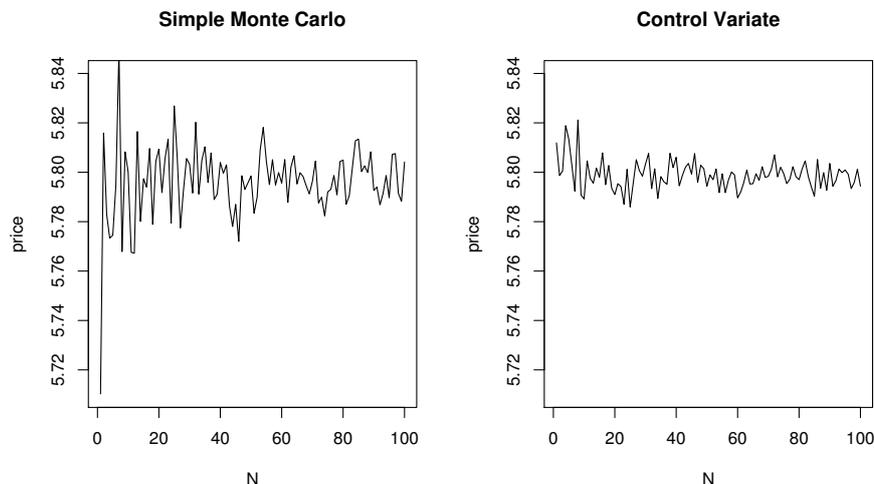


図 4.1 単純なモンテカルロ法 (左) と制御変数法を用いたモンテカルロ法 (右) の比較. 標本数は $10000 \times N$.

としたとき

$$\bar{S}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S(t_i) \quad (4.10)$$

($S(t_i)$ の算術平均) に対して,

$$(\bar{S}_A - K)^+$$

という支払いをもつオプション (アジアンコールオプション) の価格付けをする. ここでは制御変数をヨーロッパアンコールオプション (の現在価値) $e^{-rT}(S(T) - K)^+$ としてみる. アジアンコールオプションの価格近似については 4.1.6 項も参照せよ.

R のコード例. BScall() は以前紹介した, ブラックショールズ式の関数.

```
AsianCallControlVariate <- function(r, sigma, K, S0){
  N <- 100000    #シミュレーション回数

  T <- 1         #満期までの時間
  M <- 250       #[0, T] を M 分割
  Deltat <- T/M  #時間間隔

  BScallprice <- BScall(r, sigma, T, K, S0) #BS 式による解析解を計算
```

nication with R.C. Merton, prior to writing the paper, P. Samuelson went to Wall Street to discuss options with industry professionals. His Wall Street contact explained that there were two types of options available, one more complex - that could be exercised any time prior to maturity, and one more simple - that could be exercised only at the maturity date, and that only the more sophisticated European mind (as opposed to the American mind) could understand the former. In response, when Samuelson wrote the paper, he used these as prefixes and reversed the ordering.

```

Acall <- numeric(N)
Ecall <- numeric(N)

for (i in 1:N){

  S <- numeric(M+1)
  S[1] <- S0
  for (j in 1:M){
    S[j+1] <- S[j]*exp((r-0.5*sigma^2)*Deltat + sigma*sqrt(Deltat)*rnorm(1))
  } #パスの生成
  SA <- mean(S) #算術平均をとる
  Ecall[i] <- exp(-r*T)*max(S[M+1] - K,0)
  #ヨーロピアンコールオプションの支払い
  Acall[i] <- exp(-r*T)*max(SA - K, 0)
  #アジアンコールオプションの支払い
}

b <- cov(Acall,Ecall)/var(Ecall)
Yb <- Acall - b * (Ecall - BScallprice)

return(mean(Yb))
}

```

実行例 ($r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 1, S_0 = 62, K = 60$)

```

>AsianCallControlVariate(0.1,0.2,60,62)
[1] 5.614621
>

```

制御変数法を使わない場合との比較を図 4.2 に示した。

4.2.2 対称変数法

確率変数 $S(T) = S(0) \exp\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma W(T)\}$ と同じ分布をもつ n 個の無作為標本を得るには正規乱数

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n \quad (4.11)$$

を発生させ、

$$S^i = S(0) \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right\}$$

とすればよかった。このとき、同時に

$$-Z_1, -Z_2, \dots, -Z_n \quad (4.12)$$

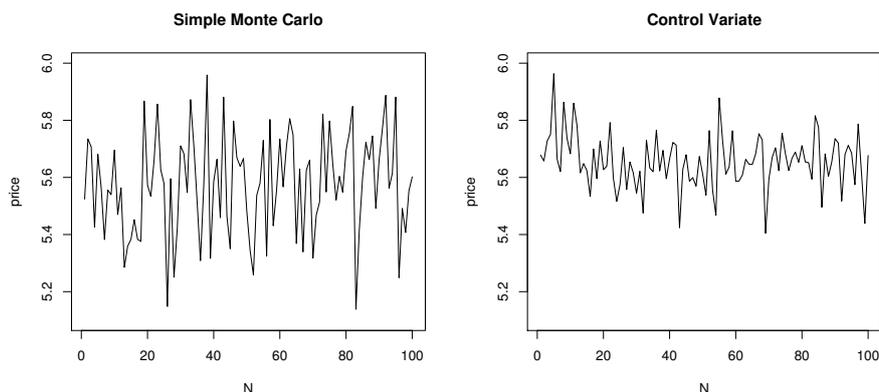


図 4.2 単純なモンテカルロ法 (左) と制御変数法を用いたモンテカルロ法 (右) の比較. 標本数は $1000 \times N$.

を乱数と考えて

$$\tilde{S}_i = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T - \sigma \sqrt{T} Z_i \right\}$$

という標本も作る. (4.11) と (4.12) の乱数は -1 の相関を持っているので, S_i と \tilde{S}_i もかなり強い負の相関を持つことが予測できる. そこで $E[Y]$ ($Y = h(S(T))$) を計算する際に

$$\bar{Y}_A = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \right)$$

を $E[Y]$ の推定量とする. ここで, $Y_i = h(S_i)$, $\tilde{Y}_i = h(\tilde{S}_i)$. これは明らかに不偏推定量である. この手法を対象変数法とよぶ.

いま標本 Y_i を生成する時間と Y_i から $-Y_i$ を生成する時間が同じであると仮定すると, 対称変数法が意味を持つのは

$$V[\bar{Y}_A] < V \left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_i \right]$$

のとき, すなわち

$$V[Y_i + \tilde{Y}_i] < 2V[Y_i]$$

のときだと言える. この式の左辺は

$$V[Y_i + \tilde{Y}_i] = V[Y_i] + V[\tilde{Y}_i] + 2\text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i) = 2V[Y_i] + 2\text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i)$$

であるから,

$$\text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i) < 0$$

であれば対象変数法に分散減少効果があることが分かる.

ヨーロピアンコールオプションの価格を対称変数法を用いて求める.

```
EcallAntithetic <- function(r, sigma, T, K, S0){
```

```
  N <- 1000000 #標本数
```

```

z <- rnorm(N) #正規乱数を発生

#満期における株価を生成
S <- S0*exp((r - sigma^2/2)*T + sigma*sqrt(T)*z)
#対称変数法により満期における株価を生成
Sm <- S0*exp((r - sigma^2/2)*T + sigma*sqrt(T)*(-z))

Y <- exp(-r*T)*pmax(S - K,0) #S に対する価格
Ym <- exp(-r*T)*pmax(Sm - K,0) #Sm に対する価格

return((mean(Y)+mean(Ym))/2)
}

```

$r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $K = 60, S_0 = 62$ としたときの結果を図 4.3 に示した.

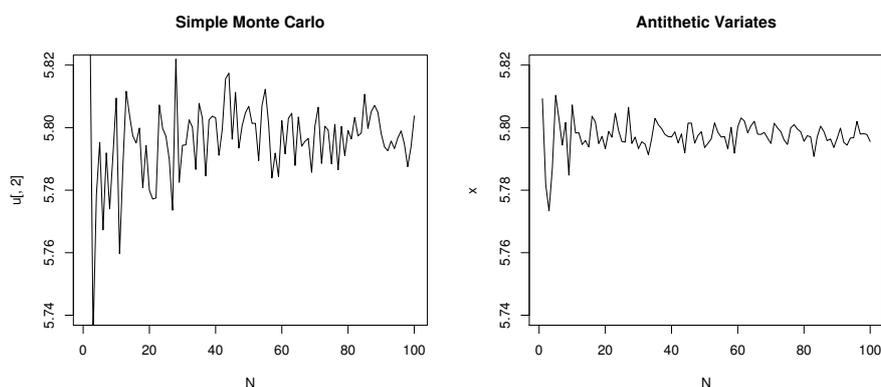


図 4.3 単純なモンテカルロ法 (左) と対称変数法を用いたモンテカルロ法 (右) の比較. 標本数は $10000 \times N$.

つぎに, ルックバックオプションの価格を求めてみる. ルックバックオプションとは

$$S_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} S(t)$$

や

$$S_{\min} = \min_{0 \leq t \leq T} S(t)$$

などの統計量の上にかかれたオプションであり

$$(S_{\max} - K)^+, (S_{\max} - S(T))^+, (K - S_{\min})^+, (S(T) - S_{\min})^+$$

などの支払い関数が考えられる. ここでは, 適当な時刻 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ に対して

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} S(t_i) - K \right)^+$$

という支払いをもつオプションの価格を求めてみる. $T = 1, t_i = i/250 (i = 0, 1, \dots, 250)$ としておく. R のサンプルコードは以下の通り.

```

LookBackCallAntithetic <- function(r, sigma, K, S0){

  N <- 100000    #シミュレーション回数

  T <- 1          #満期までの時間
  M <- 250        #[0,T] を M 分割
  Deltat <- T/M   #時間間隔

  price <- numeric(N)
  pricem <- numeric(N)

  for (i in 1:N){

    S <- numeric(M+1)
    Sm <- numeric(M+1)
    S[1] <- S0
    Sm[1] <- S0

    for (j in 1:M){
      rnd <- rnorm(1)
      S[j+1] <- S[j]*exp((r - 0.5*sigma^2)*Deltat + sigma*sqrt(Deltat)*rnd)
      Sm[j+1] <- Sm[j]*exp((r - 0.5*sigma^2)*Deltat + sigma*sqrt(Deltat)*(-rnd))
    }
    price[i] <- exp(-r*T)*max(max(S) - K,0)
    pricem[i] <- exp(-r*T)*max(max(Sm) - K, 0)
  }
  return((mean(price) + mean(pricem))/2)
}

```

実行例. $r = 0.1, \sigma = 0.2, K = 60, S_0 = 62$ のとき.

```

>LookBackCallAntithetic(0.1,0.2,60,62)
[1] 14.66851
>

```

4.2.3 層別抽出法

母集団をいくつかの層に分割し、分割された層ごとに無作為標本を抽出する方法を層別抽出法 (stratified sampling) とよぶ. X を 1 次元の確率変数とする. また, A_1, A_2, \dots, A_K を X の定義域を分割した互いに素

な集合で $P(X \in \cup_{i=1}^K A_i) = 1$ を満たすものとする。このとき

$$E[X] = \sum_{i=1}^K P(X \in A_i) E[X|X \in A_i]$$

となる。いま、全部で n 個の標本を抽出することとし、各 A_i から n_i 個の標本を抽出することにする。当然 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_K$ が成り立つ。 $X_{ij} (j = 1, 2, \dots, n_i)$ を $X \in A_i$ という条件のもとでの X の分布と同じ分布をもつ無作為標本とする。そこで $E[X|X \in A_i]$ の推定量を

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

とし、 $E[X]$ の推定量を

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^K p_i \bar{X}_i = \sum_{i=1}^K p_i \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

とする。ここで $p_i = P(X \in A_i)$ である。これは $E[X]$ の不偏推定量である。つぎに $V[\bar{X}]$ を計算すると、

$$V[\bar{X}] = \sum_{i=1}^K p_i^2 V \left[\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right] = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{n_i} \quad (4.13)$$

となる。ここで $\sigma_i^2 = V[X_{ij}] = V[X|X \in A_i]$ である。

一方、単純なモンテカルロ法から得られる標本平均の分散は σ_X^2/n であった。 σ_X^2 を σ_i で表現してみる。まず

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^K p_i E[X^2|X \in A_i] = \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2)$$

となる。よって、

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \left(\sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2$$

となる。ここで Jensen の不等式より

$$\sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2$$

だから、 $\sigma_X^2 \geq \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2$ 、すなわち

$$\frac{\sigma_X^2}{n} \geq \sum_{i=1}^K \frac{p_i \sigma_i^2}{n}$$

が分かる。ここで、 $n_i = np_i$ としてみると、(4.13) の右辺は

$$\sum_{i=1}^K \frac{p_i \sigma_i^2}{n}$$

となる。よって、 $n_i = np_i$ と分割すれば層別抽出法により標本平均の分散が減少することが分かる。ただし、この n_i が \bar{X} の分散をもっとも小さくするわけではない。いま、 $\sum_{i=1}^K n_i = n$ という条件のもとで (4.13) の右辺を最小にするような n_i を求める。すると

$$n_i = \frac{np_i \sigma_i}{\sum_{k=1}^K p_k \sigma_k}, \quad i = 1, \dots, K$$

となる n_i が最小解となり、このときの $V[\bar{X}]$ は (4.13) より

$$V[\bar{X}] = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^K p_i \sigma_i \right)^2$$

となる.

層別抽出法を使って正規分布 $N(0,1)$ にしたがう乱数を発生させるためにはつぎのようにする. まず, 確率 p_1, p_2, \dots, p_K ($\sum_{i=1}^K p_i = 1$) を与える. $q_i = \sum_{k=1}^i p_k$ と定義する. 互いに素な集合 A_1, A_2, \dots, A_K を

$$a_1 = F^{-1}(q_1), a_2 = F^{-1}(q_2), \dots, a_{K-1} = F^{-1}(q_{K-1})$$

かつ

$$A_1 = (-\infty, a_1], A_2 = (a_1, a_2], \dots, A_K = (a_{K-1}, \infty)$$

と定義する. ここで F は標準正規分布の分布関数, $X \sim N(0,1)$ である. 実数直線はこの A_1, \dots, A_K によって分割されている. また

$$P(X \in A_i) = F(a_i) - F(a_{i-1}) = p_i$$

となる. $X \in A_i$ という条件のもとで X の標本を生成するには, つぎのようにする. まず U を一様分布 $U[0,1]$ にしたがう確率変数として,

$$V_i = q_{i-1} + (q_i - q_{i-1})U, \quad i = 1, \dots, K \quad (4.14)$$

とおく. ここで $q_0 = 0$ と定義する. すると V_i は区間 $[q_{i-1}, q_i]$ 上の一様分布にしたがい, さらに $F^{-1}(V_i)$ の分布は $X \in A_i$ という条件のもとの X の分布に等しくなる. 実際,

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(V_i) \leq x) &= P(q_{i-1} + (q_i - q_{i-1})U \leq F(x)) \\ &= P\left(U \leq \frac{F(x) - q_{i-1}}{q_i - q_{i-1}}\right) \\ &= \frac{F(x) - q_{i-1}}{q_i - q_{i-1}} \\ &= P(X \leq x | X \in A_i) \end{aligned}$$

である. よって, 一様乱数 u から (4.14) によって v を作り, $F^{-1}(v)$ とすれば, $X \in A_i$ という条件のもとの X の標本となる.

つぎのサンプルコードは標準正規分布にしたがう乱数を層別抽出法によって生成するものである.

```

ssampling <- function(n){

# n: 生成する標本の数
q <- c(0,0.25,0.5,0.75,1) #分割を与える確率
m <- floor(n*dif(q))      #各層における標本の数を確率に比例して与える
v <- numeric(0)

for (i in 1:(length(q)-1)){
  v <- c(v,q[i] + runif(m[i])*(q[i+1]-q[i]))
}

```

```
return(qnorm(v))      #qnorm は標準正規分布の逆関数
}
```

Black-Scholes モデルにおいてヨーロピアンコールオプションの価格を層別抽出法によって求めたものと、単純なモンテカルロ法によって求めたものの比較をすると図 4.4 のようになった。

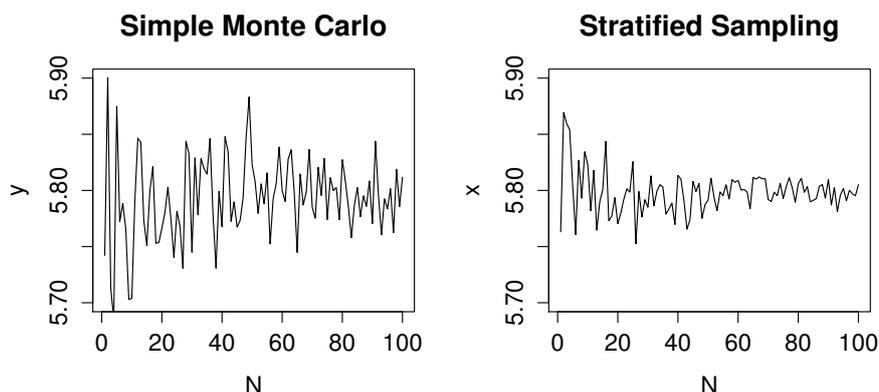


図 4.4 単純なモンテカルロ法 (左) と層別抽出法を用いたモンテカルロ法 (右) の比較. 標本数は $10000 \times N$.

4.3 準モンテカルロ法

ファイナンスの多くの問題は確率変数 X_1, X_2, \dots, X_d の期待値 $E[g(X_1, X_2, \dots, X_d)]$ (g は適当な関数) に帰着される. 正規乱数なども一様乱数から生成されることを考えれば, 結局 $E[f(U_1, U_2, \dots, U_d)]$ (g は適当な関数, U_1, \dots, U_d は互いに独立な一様分布にしたがう確率変数) という形の期待値の評価がしたいことになる.

$$E[f(U_1, \dots, U_d)] = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$$

であるから, 結局右辺の積分値を計算したいことになる. ここで, **低食い違い列 (low-discrepancy 列)** と呼ばれる**確定的な** $[0, 1]^d$ 上の点 x_1, \dots, x_n を用いて

$$\int_{[0,1]^d} f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (4.15)$$

と近似する方法を**準モンテカルロ法 (Quasi-Monte Carlo Method, QMC)** とよぶ. 低食い違い列とは $[0, 1]^d$ 上に散らばった非常に一様性の高い数列のことである. 正確にはつぎのように定義される. まず $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]^d$ に対して

$$D(x_1, \dots, x_n) = \sup_E \left| \frac{\#\{x_i \in E\}}{n} - \text{vol}(E) \right| \quad (4.16)$$

を定義する. ここで E は $[0, 1]^d$ の部分集合で \sup_E は E を $[0, 1]^d$ のすべての部分集合として動かしたときの上限を表し, $\#\{x_i \in E\}$ は E に含まれる点 x_i の数, $\text{vol}(E)$ は E の面積を表す. このとき

$$D(x_1, \dots, x_n) \leq c_d \frac{(\log n)^d}{n} \quad (4.17)$$

を満たす点列 x_1, \dots, x_n を低食い違い列とよぶ。ここで c_d は次元 d にのみ依存する数。この低食い違い列を用いると (4.15) の両辺の誤差 $|\int_{[0,1]^d} f(x)dx - 1/n \sum_{i=1}^n f(x_i)|$ は $O((\log n)^d/n)$ のオーダーでゼロに近づくことが知られている。次元 d がそれほど大きくなければ、およそ $O(1/n)$ のオーダーである。モンテカルロ法の誤差のオーダーは $O(1/\sqrt{n})$ であったことを思い出そう。低食い違い列には Faure 列, Halton 列, Sobol' 列などがある。低食い違い列の生成法などについては Glasserman を参照のこと。

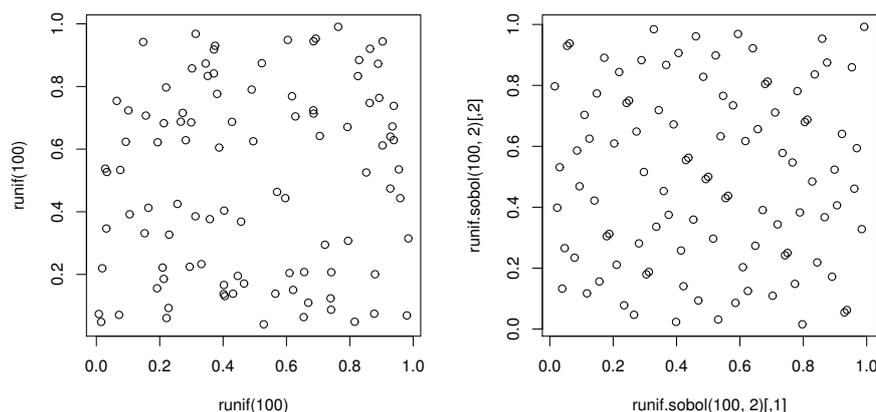


図 4.5 一様擬似乱数 (左) と Sobol' 列 (右) の比較

R では fOptions パッケージや randtoolbox パッケージに Halton 列や Sobol' 列などを生成する関数が入っている。ファイナンスにおいては計算したい対象が積分の形で表現できれば準モンテカルロ法が適用できる。準モンテカルロ法を利用する際の注意をいくつか述べておく。

- (4.15) における関数 f は具体的に表示できる必要はなく、 $f(x)$ を評価する手続き (アルゴリズム) さえ分かればよい。
- 通常のモンテカルロ法と異なり、低食い違い列を生成する際には次元を明示的に指定する必要がある。たとえば d 次元の一様 (擬似) 乱数を 2 個生成するときは、互いに独立な $2d$ 個の一様乱数 U_1, \dots, U_{2d} 発生させそれを分割すれば (U_1, \dots, U_d) , (U_{d+1}, \dots, U_{2d}) がそれぞれ d 次元一様乱数となった。しかし、低食い違い列では生成方法が次元に依存するため、同じようにはできない。

Black-Scholes モデルにおけるヨーロピアンコールオプションを Sobol' 列を使って価格付けした結果を図 4.6 と図 4.7 に示す。

```
QMCBScall <- function(r, sigma, T, K, S0){
  library(fOptions)
  N <- 1000000
  rnd <- rnorm.sobol(N,1) #1次元 Sobol 列を N 個発生
  S <- S0 * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T + sigma * sqrt(T) * rnd)
```

```

return(mean(exp(-r*T) * pmax(S - K, 0)))
}

```

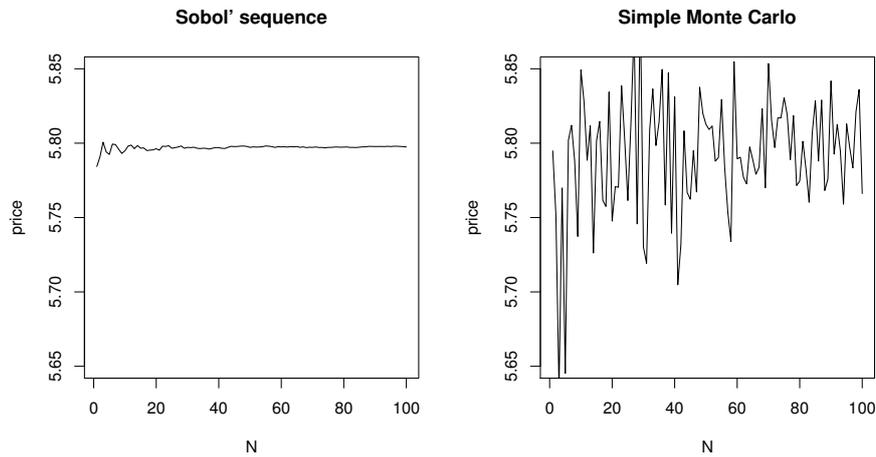


図 4.6 真の解への収束の様子. 左が Sobol' 列, 右が単純なモンテカルロ. 標本数は $1000 \times N$

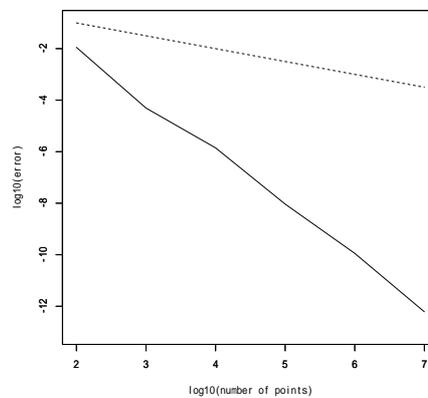


図 4.7 誤差の計測. 実線が Sobol' 列の誤差. N は標本数. 破線は傾きが $-1/2$ の直線.

つぎに離散幾何平均オプション (アジアンオプション) の価格近似を見てみる. $\{S(t)\}$ を Black-Scholes モデルにしたがう株価過程としたとき, 満期までの期間 $[0, T]$ を d 分割する時点 $t = 0, T/d, 2T/d, \dots, T$ における株価

$$S(0), S(T/d), S(2T/d), \dots, S(T)$$

について

$$\bar{S} = \left(\prod_{i=0}^{d-1} S(iT/d) \right)^{1/(d+1)}$$

を原資産とするコールオプション $(\bar{S} - K)^+$ を考える. $t_i = iT/d$ とおく. \bar{S} と同じ分布をもつ無作為標本を得るためには

$$(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_d))$$

をシミュレーションする必要がある. $S(t) = S(0) \exp\{(r - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)\}$ であるから, 結局

$$(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_d))$$

をシミュレーションすればよい. 一般に $W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t)$ であるから, (Z_1, Z_2, \dots, Z_d) を d 次元標準正規分布にしたがう確率変数としたとき

$$\begin{aligned} W(t_1) &= W(t_0) + \sqrt{t_1} Z_1 = \sqrt{t_1} Z_1 \\ W(t_2) &= W(t_1) + \sqrt{t_2 - t_1} Z_2 = \sqrt{t_1} Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1} Z_2 \\ &\vdots \\ W(t_{d-1}) &= W(t_{d-2}) + \sqrt{t_{d-1} - t_{d-2}} Z_{d-1} = \sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i \\ W(t_d) &= W(t_{d-1}) + \sqrt{t_d - t_{d-1}} Z_d = \sum_{i=1}^d \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_{d-1}) \\ W(t_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \sqrt{t_{d-1} - t_{d-2}} & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \sqrt{t_{d-1} - t_{d-2}} & \sqrt{t_d - t_{d-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{d-1} \\ Z_d \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

となる^{*18}.

```

QMCDisGeoAsianCall <- function(r, sigma, d, T, K, S0){

  library(fOptions)

  N <- 1000000    #シミュレーション回数
  Deltat <- T/d    #時間間隔
  t <- seq(1:d)/d*T #平均をとる時刻のベクトルを生成
  A <- matrix(sqrt(Deltat), d, d) #乱数生成の準備
  A[upper.tri(A)] <- 0

  Acall <- numeric(N)
  rnd <- rnorm.sobol(N, d) #d次元 Sobol' 列を生成

  for (i in 1:N){

```

^{*18}(4.18) の右辺の正方行列は, $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))$ の共分散行列 $C = (C_{ij}), C_{ij} = \min\{t_i, t_j\}$ を $C = AA^T$ とコレスキー分解した際の A になっている.

```

    Z <- rnd[i,]
    W <- A %*% Z
    S <- S0*exp((r - sigma^2/2)*t + sigma*W)
    S <- c(S, S0) #初期株価を追加
    SA <- prod(S)^(1/(d+1)) #幾何平均をとる
    Acall[i] <- exp(-r*T)*max(SA - K, 0)
  }
  return(mean(Acall))
}

```

離散幾何平均オプションには解析解があるので誤差を計算すると図 4.8 のようになる。

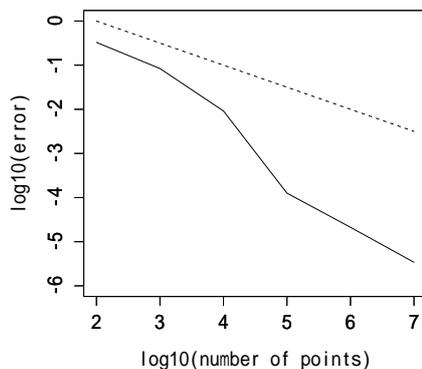


図 4.8 誤差の計測. 実線が Sobol' 列の誤差. N は標本数. 破線は傾きが $-1/2$ の直線.

4.4 並列計算

ヨーロッパンオプション（早期行使ができないオプション）のモンテカルロ法による価格近似には並列計算が有効である。確率変数 X と関数 f に関する期待値 $E[f(X)]$ を計算したいとき、モンテカルロ法では無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_N を生成して

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

を期待値 $E[f(X)]$ の近似とした。ここで各 $f(X_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を計算する工程はそれぞれ独立に実行できる。そこで並列計算を利用することにより計算速度の向上が期待できることが分かる。R では snow というパッケージで並列計算ができる。以下、実行例を示す。例として Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパンコールオプションを用いる。まずつぎの関数を用意する。

```

parBScall <- function(x, r=0.1, sigma=0.2, T=5/12, K=60, S0=62){
  S <- S0*exp((r - sigma^2/2)*T + sigma*sqrt(T)*x)
  payoff <- exp(-r*T)*pmax(S - K, 0)
}

```

```

    return(payoff)
}

```

この関数の x には正規乱数が入る。 x を入力するとそれに関するオプションの支払いが返ってくる関数である。以下、R で実行した結果。

```

> library(snow) # snow パッケージを読み込む
> cl <- makeCluster(2, type="MPI") #クラスターを 2 つ作る
Loading required package: Rmpi
2 slaves are spawned successfully. 0 failed.
> x <- rnorm(1000000) #正規乱数を 100 万個発生
> clusterExport(cl, "x") #変数 x を各クラスタに渡す
> source("parBScall.r")
> clusterExport(cl,"parBScall") #関数 parBScall を各クラスタに渡す
> system.time(a <- parSapply(cl, x, parBScall)) #並列計算を実行
   ユーザ   システム   経過
   24.561    22.413    47.000
> mean(a)
[1] 5.800261
> system.time(b <- sapply(x, parBScall)) #並列計算を行わない場合
   ユーザ   システム   経過
   81.177    0.000    81.197
> mean(b)
[1] 5.800261

```

並列計算を用いると実行時間が約半分になる。 `sapply` という関数はベクトル x の各要素について関数 `parBScall` を評価し、その結果をベクトルとして返す関数である。 `parSapply` は `sapply` の並列計算版であり、パッケージ `snow` に含まれる。

つぎにクラスタを 4 個作ってみる。

```

> cl <- makeCluster(4, type="MPI") #クラスタを 4 個作る
4 slaves are spawned successfully. 0 failed.
> clusterExport(cl, "x")
> clusterExport(cl,"parBScall")
> system.time(a <- parSapply(cl, x, parBScall))
   ユーザ   システム   経過
   15.177    10.081    25.270
>

```

さらに実行時間が短くなる。この実行例では乱数を事前に発生させておき、各クラスタに乱数を分割して渡しているが、つぎの例では各クラスタで乱数を発生させている。まずつぎの関数を用意する。

```

parBScall2 <- function(N, r=0.1, sigma=0.2, T=5/12, K=60, S0=62){

```

```

rnd <- qnorm(runif(N))

S <- S0*exp((r - sigma^2/2)*T + sigma*sqrt(T)*rnd)
payoff <- exp(-r*T)*pmax(S - K,0)
return(mean(payoff))
}

```

変数 N には発生させる乱数の個数が入る。

```

> library(snow)
> cl <- makeCluster(2,type="MPI")           #クラスタを 2 つ作る
> clusterSetupRNG(cl, type="RNGstream")    #並列計算用の乱数を発生させる
Loading required package: rlecuyer
[1] "RNGstream"
> system.time(c <- clusterCall(cl, parBScall2, N=1000000))
   user  system elapsed      #各クラスタで乱数を 100 万生成して評価
 0.062   0.195   0.645
> mean(as.numeric(c))
[1] 5.795594
> system.time(d <- parBScall2(2000000))    #並列計算を用いない。乱数を 200 万。
   user  system elapsed
 0.840   0.033   0.963
> mean(d)
[1] 5.792509
>

```

並列計算をする場合、各クラスタで同じ乱数列が発生する可能性があるので、各クラスタで違う乱数の種を使うか、並列計算専用の乱数発生器を使う。

最後に並列処理を終わらせる。

```

> stopCluster(cl)
[1] 1

```

4.5 リスク指標

モンテカルロ法によりオプションのリスク指標を計算する。ここでは主にデルタを取り上げる。デルタは複製ポートフォリオを作る際の際の原資産の保有数であった。オプションのデルタ δ とはオプション価値 V (たとえば $V = E[f(S(T))]$) を現在の株価 S_0 で偏微分したもの、すなわち

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}$$

である。ちなみに

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}, \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \frac{\partial V}{\partial T}, \frac{\partial V}{\partial r}$$

をそれぞれガンマ、ベガ、シータ、ローとよびリスク管理やヘッジにおいて重要な指標となっている。一般にはパラメータ θ に依存する確率変数 $Y(\theta)$ の期待値

$$\alpha(\theta) = E[Y(\theta)]$$

に対して、

$$\alpha'(\theta) = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)] \quad (4.19)$$

を計算することを考える。例えば、Black-Scholes モデルにおいて、支払い関数を h とするヨーロッパオプションを考える。その価格は

$$E[e^{-rT}h(S(T))] = E\left[e^{-rT}h\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)\right\}\right)\right]$$

であった。このときデルタは

$$\frac{d}{dS_0} E[e^{-rT}h(S(T))] = \frac{d}{dS_0} E\left[e^{-rT}h\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)\right\}\right)\right]$$

となる。よって、(4.19)において

$$Y(\theta) = e^{-rT}h\left(\theta \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)\right\}\right)$$

とすればよい。

4.5.1 差分近似による方法

微分を差分近似してリスク指標を求める。一般に関数 $f(x)$ の (1 階) 微分はつぎのいずれかで近似することが多い:

$$\begin{aligned} \text{前進差分: } & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \text{後退差分: } & \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ \text{中心差分: } & \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \end{aligned}$$

中心差分は前進差分と後退差分の平均であり、この3つのなかでは一番精度がよい。まず微分を差分近似することを考えて、(4.19)を十分小さな h に対して

$$\frac{E[Y(\theta+h)] - E[Y(\theta)]}{h} \quad (4.20)$$

で近似する。 $E[Y(\theta+h)]$ と $E[Y(\theta)]$ をそれぞれモンテカルロ法によって評価し (4.20) を計算すればよい。これは前進差分だが、中心差分、後退差分を使ってもよい。中心差分の方が精度がよいが、オプション価格とデルタの両方を求めることを考えると、 $E[Y(\theta-h)]$, $E[Y(\theta)]$, $E[Y(\theta+h)]$ の3つを計算しなくてはならな

いことに注意する. $\{Y_i(\theta+h)\}_{i=1,\dots,N}$, $\{Y_j(\theta)\}_{j=1,\dots,N'}$ をそれぞれ $Y(\theta+h)$, $Y(\theta)$ からの無作為抽出標本としたとき

$$\hat{\delta} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta+h) - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} Y_j(\theta) \right) \quad (4.21)$$

が (4.19) の推定量となる. $E[Y(\theta)]$, $E[Y(\theta+h)]$ が計算できさえすれば, どんなオプションにも適用可能な方法である. ただし, (4.21) は $dE[Y(\theta)]/d\theta$ の不偏推定量ではない. モンテカルロ法の誤差に加えて微分を (4.20) で近似することによる誤差がある. $\hat{\delta}$ の平均 2 乗誤差は

$$E \left[(\hat{\delta} - \alpha'(\theta))^2 \right] = \left(E[\hat{\delta}] - \alpha'(\theta) \right)^2 + E \left[(\hat{\delta} - E[\hat{\delta}])^2 \right] = (\hat{\delta} \text{の偏り}) + (\hat{\delta} \text{の分散}) \quad (4.22)$$

となる. $\hat{\delta}$ の偏りを計算してみよう. まず, $\alpha(\theta)$ をテイラー展開して

$$\alpha(\theta+h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h^2 + O(h^3).$$

また,

$$E[\hat{\delta}] = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[Y_i(\theta+h)] - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} E[Y_j(\theta)] \right) = \frac{1}{h} (E[Y(\theta+h)] - E[Y(\theta)]) = \frac{\alpha(\theta+h) - \alpha(\theta)}{h}$$

である. よって,

$$E[\hat{\delta}] - \alpha'(\theta) = \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h + O(h^2)$$

の 2 乗が推定量の偏りとなる. h を 0 に近づければ偏りは 0 に近づく. 一方, $\hat{\delta}$ の分散は

$$\begin{aligned} E \left[(\hat{\delta} - E[\hat{\delta}])^2 \right] &= \text{Var}[\hat{\delta}] = \text{Var} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta+h) - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} Y_j(\theta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \text{Var} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta+h) - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} Y_j(\theta) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

である. ここで, $\{Y_i(\theta+h)\}$, $\{Y_j(\theta)\}$ は独立に抽出している (独立な乱数でそれぞれの標本を生成している) とし, $N = N'$ とすると

$$E \left[(\hat{\delta} - E[\hat{\delta}])^2 \right] = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{N} (\text{Var}[Y(\theta+h)] + \text{Var}[Y(\theta)]) \approx O(N^{-1}h^{-2})$$

となる. よって, (4.22) は

$$E \left[(\hat{\delta} - \alpha'(\theta))^2 \right] = O(h^2) + O(N^{-1}h^{-2})$$

となる. よって, h を 0 に近づけると $\hat{\delta}$ の偏りは小さくなるが, 分散は大きくなってしまふ. よって, h を無制限に 0 に近づけることはできない. $\hat{\delta}$ の偏りと分散の間には h に関してトレードオフの関係が生じている. 平均 2 乗誤差を最小にする最適な h^* を計算することもできる. 詳しくは Glasserman の本などを参照せよ. ちなみに, 最適な h^* を用いても収束の速さは $O(N^{-1/4})$ であることが知られている.

上では (4.23) の計算において $\{Y_i(\theta + h)\}$ と $\{Y_j(\theta)\}$ は独立に抽出されていると仮定した。しかし、 $Y(\theta + h), Y(\theta)$ を同じ乱数を使って同時に抽出してもよい。(4.23) は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \text{Var} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta + h) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta) \right) \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \text{Var} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta + h) \right] + \text{Var} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta) \right] - \text{Cov} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta + h), \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\theta) \right) \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $\{Y_i(\theta + h)\}$ と $\{Y_i(\theta)\}$ を共通の乱数から抽出した場合、第3項の共分散は1に近くなる。一方独立に抽出した場合は共分散項は0である。よって、同時に抽出した方が誤差は小さくなると考えられる。同時に抽出した場合の収束の速さは $O(N^{-1/3})$ であることが知られている。ただし、同じ乱数を使う手法はバリアオプションやデジタルオプションには適さない。

4.5.2 パスごとに微分する方法

確率変数 $Y(\theta)$ について、パスごとの微分

$$Y'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \quad \left(= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h, \omega) - Y(\theta, \omega)}{h} \right) \quad (4.24)$$

が a.s.(確率 1) で存在すると仮定する。このとき、もし微分と積分(期待値作用素)の交換

$$E \left[\frac{d}{d\theta} Y(\theta) \right] = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)] \quad (4.25)$$

が成り立つならば、 $Y'(\theta)$ の標本平均は $\alpha'(\theta)$ の不偏推定量になる。微分 (4.24) の計算を例で見えていく。

例題 4.1 (Black-Scholes モデルにおけるヨーロピアンコールオプション)

$$Y = e^{-rT} (S(T) - K)^+$$

として、 dY/dS_0 を計算する。ここで

$$S(T) = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W(T) \right\}$$

である。合成関数の微分公式より

$$\frac{dY}{dS_0} = \frac{dY}{dS(T)} \cdot \frac{dS(T)}{dS_0}.$$

$$\frac{d}{dx} (x - K)^+ = \begin{cases} 0, & x < K \\ 1, & x > K. \end{cases}$$

を使うと

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT} I \{ S(T) > K \}$$

ここで、 I は定義関数。すなわち、集合 X に対して、

$$I \{ X \} := I \{ X \}(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in X \\ 0, & \omega \notin X. \end{cases}$$

$(x - K)^+$ は $x = K$ で微分可能ではないが, $\{S(T) = K\}$ という事象が起こる確率は 0 なので, a.s. では無視して構わない. つまり Y は $S(T)$ に関して a.s. で微分可能である.

一方,

$$\frac{dS(T)}{dS_0} = \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma W(T) \right\} = \frac{S(T)}{S_0}.$$

よって,

$$\frac{dY}{dS_0} = e^{-rT} \frac{S(T)}{S_0} I\{S(T) > K\}$$

となる. この式を使ってモンテカルロシミュレーションにより $E[dY/dS_0]$ を計算すればよい^{*19}.

例題 4.2 (Black-Scholes モデルにおけるアジアンコールオプション) 経路依存型オプションである (離散型) アジアンコールオプションを考える. 固定された時刻 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$ に対して

$$Y = e^{-rT} (\bar{S} - K)^+, \quad \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i)$$

として, dY/dS_0 を計算する. まず,

$$\frac{dY}{dS_0} = \frac{dY}{d\bar{S}} \cdot \frac{d\bar{S}}{dS_0}.$$

である. 先の例と同じようにして

$$\frac{dY}{d\bar{S}} = e^{-rT} I\{\bar{S} > K\}.$$

また,

$$\frac{d\bar{S}}{dS_0} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{dS(t_i)}{dS_0} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S(t_i)}{S_0} = \frac{\bar{S}}{S_0}.$$

よって,

$$\frac{dY}{dS_0} = e^{-rT} \frac{\bar{S}}{S_0} I\{\bar{S} > K\}$$

となる. $E[dY/dS_0]$ によってアジアンオプションのデルタが計算できる. アジアンオプションは解析解を持たないので, この計算は実用上も重要である.

一般に, $X(\theta) = (X_1(\theta), X_2(\theta), \dots, X_m(\theta))$ を原資産とし, $Y(\theta) = h(X(\theta))$ を割り引かれた支払いとしたとき, パラメータ θ に関するパスごとの微分 $dY/d\theta$ は

$$\frac{dY}{d\theta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial h}{\partial x_i} (X(\theta)) X_i'(\theta)$$

となるから,

$$E \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial h}{\partial x_i} (X(\theta)) X_i'(\theta) \right] (= E[(\text{支払い関数の微分}) \times (\text{原資産のパスごとの微分})])$$

が求めたいリスク指標になる.

微分と積分の交換 (4.25) が成立しない例を試みる.

^{*19} $S(T)$ が対数正規分布に従うことを使えば, $E[dY/dS_0]$ は明示的に計算できる.

例題 4.3 (Black-Scholes モデルにおけるデジタルオプション) (Cash-or-Nothing) デジタルオプションとは K を定数としたとき

$$I\{S(T) > K\}$$

という支払いをもつオプションのことである。このオプションのデルタを計算する。

$$Y = e^{-rT} I\{S(T) > K\}$$

として、 dY/dS_0 を計算すればよい。まず、

$$\frac{dY}{dS(T)} = 0$$

であることは明らか。 $S(T) = K$ では微分できないが、先ほどと同じ理由で無視できる。よって、

$$\frac{dY}{dS_0} = 0$$

である。一方、 $dE[Y]/dS_0$ は明らかに 0 ではない。よって

$$\frac{d}{dS_0} E[Y] \neq E \left[\frac{dY}{dS_0} \right] = 0$$

となり、微分と積分の交換が成立しない。すなわち dY/dS_0 は不偏推定量ではない。

大まかに言うと支払い関数が考えているパラメータ (デルタの場合 S_0) について連続でない場合、微分と積分の交換が成立せず、パスごとの微分による方法が機能しない。バリアオプションや S_0 に関する 2 階微分 (ガンマという) もパスごとの微分による方法が適用できない。(4.25) が成り立つための条件について、詳しくは Glasserman の本を参照せよ。

パスごとの微分が明示的に計算できることも必要である。パスごとの微分が明示的に計算できない場合には近似に頼ることになる。たとえば、初期値 S_0 についての微分についてはつぎの結果が知られている (1次元の結果のみ述べる)。

確率微分方程式

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), X(0) = x_0 \quad (4.26)$$

の解 $X(t)$ の初期値に関する微分 $Y(t) := \frac{\partial X(t)}{\partial x_0}$ は

$$dY(t) = \mu'(X(t))Y(t)dt + \sigma'(X(t))Y(t)dW(t), Y(0) = 1 \quad (4.27)$$

を満たす。 $Y(t)$ を **1 次変分過程** とよぶ。

直観的にはつぎのように理解すればよい。(4.26) の Euler-丸山近似

$$\hat{X}(t + \Delta t) - \hat{X}(t) = \mu(\hat{X}(t))\Delta t + \sigma(\hat{X}(t))\sqrt{\Delta t}Z, Z \sim N(0, 1) \quad (4.28)$$

を考える。(4.28) の両辺を x_0 で偏微分すると

$$\frac{\partial \hat{X}(t + \Delta t)}{\partial x_0} - \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial x_0} = \mu'(\hat{X}(t)) \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial x_0} \Delta t + \sigma'(\hat{X}(t)) \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial x_0} \sqrt{\Delta t} Z$$

となる。よって、 $\hat{Y}(t) := \partial \hat{X}(t) / \partial x_0$ とおけば

$$\hat{Y}(t + \Delta t) - \hat{Y}(t) = \mu'(\hat{X}(t))\hat{Y}(t)\Delta t + \sigma'(\hat{X}(t))\hat{Y}(t)\sqrt{\Delta t}Z$$

となり、これは (4.27) の Euler-丸山近似式である。

よって (4.26) と (4.27) を Euler-丸山近似などによって近似すればパスごとの微分が近似できる。ただし、多次元になると $Y(t)$ が行列になり数多くの確率微分方程式を近似する必要が出てくるため、計算量が多くなってしまう。

4.5.3 密度関数を微分する方法 (尤度比法)

$X(\theta) = (X_1(\theta), X_2(\theta), \dots, X_m(\theta))$ を原資産とし、 $Y(\theta) = h(X(\theta))$ を割り引かれた支払いとしたときの $dE[Y(\theta)]/d\theta$ を考える。 $X(\theta)$ の (同時) 密度関数を $g_\theta(x)$ とする。このとき

$$E[Y(\theta)] = \int_{\mathbb{R}^m} h(x)g_\theta(x)dx$$

となる。微分と積分の交換が可能であるとすると

$$\frac{d}{d\theta}E[Y(\theta)] = \frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^m} h(x)g_\theta(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} h(x) \frac{dg_\theta(x)}{d\theta} dx. \quad (4.29)$$

よって、

$$\frac{d}{d\theta}E[Y(\theta)] = \int_{\mathbb{R}^m} h(x) \frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x) dx = E \left[h(X(\theta)) \frac{\dot{g}_\theta(X(\theta))}{g_\theta(X(\theta))} \right]. \quad (4.30)$$

ここで $\dot{g}_\theta(x) = dg_\theta(x)/d\theta$ 。よって、もし微分と積分の交換が成立するならば

$$Y(\theta) \frac{\dot{g}_\theta(X(\theta))}{g_\theta(X(\theta))} \quad (4.31)$$

は $dE[Y(\theta)]/d\theta$ の不偏推定量となる。この方法では支払い関数 h を微分する必要がない。また

$$\frac{\dot{g}_\theta(X(\theta))}{g_\theta(X(\theta))} = \frac{d}{d\theta} \log g_\theta(X(\theta))$$

として、右辺の計算をしたほうが計算が楽になることがある。

パスごとの微分法では、支払い関数が滑らかであれば (連続であれば) 微分と積分の交換が成立した。実際には連続でない支払い関数はたくさん存在する。一方、(4.29) が成立するためには $g_\theta(x)$ が θ について滑らかであれば十分である。密度関数がパラメータ θ について滑らかであることはそれほど強い条件ではない。具体例を挙げる。

例題 4.4 (Black-Scholes モデルにおけるヨーロピアンコールオプション)

$$S(T) = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right\}$$

と $W(T) \sim N(0, T)$ であることを使うと、 $S(T)$ は対数正規分布にしたがう。その密度関数は

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma x} \exp \left\{ -\frac{(\log(x/S_0) - (r - \sigma^2/2) T)^2}{2\sigma^2 T} \right\}$$

である。よって

$$\log g(x) = (S_0 \text{に依存しない定数}) - \frac{(\log(x/S_0) - (r - \sigma^2/2) T)^2}{2\sigma^2 T}$$

より,

$$\frac{\partial}{\partial S_0} \log g(x) = \frac{\log(x/S_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma^2 T S_0}.$$

ゆえにデルタは

$$E \left[e^{-rT} (S(T) - K)^+ \frac{\log(S(T)/S_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma^2 T S_0} \right]$$

となる. これに $S(T) = S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma W(T)\}$ を代入すると

$$E \left[e^{-rT} (S(T) - K)^+ \frac{W(T)}{\sigma T S_0} \right] \quad (4.32)$$

となる. $W(T) \sim N(0, T)$ を使って, これをモンテカルロ法で計算すればよい.

例題 4.5 (Black-Scholes モデルにおけるデジタルオプション) $I\{S(T) > K\}$ という支払いをもつデジタルオプションのデルタはコールオプションのときと同様にして

$$E \left[e^{-rT} I\{S(T) > K\} \frac{W(T)}{\sigma T S_0} \right] \quad (4.33)$$

となる. 支払い関数を微分する必要がないので, デジタルオプションにも適用ができる.

例題 4.6 (Black-Scholes モデルにおけるアジアンコールオプション) 離散型アジアンオプションを考える. 固定された時刻 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$ に対して

$$Y = e^{-rT} (\bar{S} - K)^+, \quad \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i)$$

として, $\partial E[Y]/\partial S_0$ を計算したい. $g(x_1, \dots, x_m)$ を $S(t_1), \dots, S(t_m)$ の同時密度関数とすると

$$E \left[e^{-rt} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i) - K \right)^+ \frac{\partial}{\partial S_0} \log g(S(t_1), \dots, S(t_m)) \right]$$

を計算すればよい. Black-Scholes モデル (幾何ブラウン運動) はマルコフ性を持つのでベイズの法則から

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_m) &= g(x_1|S_0)g(x_2, \dots, x_m|x_1) \\ &= g(x_1|S_0)g(x_2|x_1)g(x_3, \dots, x_m|x_1, x_2) \\ &= g(x_1|S_0)g(x_2|x_1)g(x_3, \dots, x_m|x_2) \\ &= \dots \\ &= g(x_1|S_0)g(x_2|x_1) \dots g(x_m|x_{m-1}). \end{aligned}$$

となる. ここで $g(x_{j+1}|x_j)$ ($j = 0, \dots, m$) は $S(t_j)$ で条件付けたもとの $S(t_{j+1})$ の密度関数 ($S(t_j)$ から $S(t_{j+1})$ への推移密度関数) である. すなわち

$$g(x_{j+1}|x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t_{j+1} - t_j)\sigma x_{j+1}} \exp \left\{ -\frac{(\log(x_{j+1}/x_j)) - (r - \sigma^2/2)(t_{j+1} - t_j)}{2\sigma^2(t_{j+1} - t_j)} \right\}.$$

よって,

$$\frac{\partial \log g(x_1, \dots, x_m)}{\partial S_0} = \frac{\partial \log g(x_1|S_0)}{\partial S_0} = \frac{\log(x/S_0) - (r - \sigma^2/2)t_1}{\sigma^2 t_1 S_0}$$

だから

$$\frac{\partial}{\partial S_0} \log g(S(t_1), \dots, S(t_m)) = \frac{\log(S(t_1)/S_0) - (r - \sigma^2/2)t_1}{\sigma^2 t_1 S_0} = \frac{W(t_1)}{\sigma t_1 S_0}$$

となる。ここで $S(t_1) = S_0 \exp((r - \sigma^2/2)t_1 + \sigma W(t_1))$ を使っている。以上より、離散型アジアンオプションのデルタは

$$E \left[e^{-rT} (\bar{S} - K) \frac{W(t_1)}{\sigma t_1 S_0} \right]$$

となることが分かった。

密度関数を微分する方法では、密度関数が明示的に計算できなければならないことに注意する。

パスごとの微分法と密度関数を微分する方法の両方が適用できる場合にはどちらを用いたほうがよいだろうか。この2つの方法の大きな違いは推定量の分散にある。結論から言えば密度関数を微分する方法を(そのまま)使う方法のほうが推定量の分散が大きくなる。例題 4.4 や例題 4.5 の場合には $W(T)/(\sigma T S_0)$ 、例題 4.6 の場合には $W(t_1)/(\sigma t_1 S_0)$ の部分の分散が大きくなりやすい(とくに T や t_1 が小さいとき)。両方の方法が使える場合はパスごとの微分法を使ったほうがよい。パスごとの微分法が使えない場合の一つとして支払い関数が高連続性を持つ場合が挙げられた。よって、支払い関数が高連続性を持つ場合には密度関数を微分する方法を使わなければならないが、この場合でも局所化というテクニックを使うことによりパスごとの微分法を適用することができる。

最近では Malliavin (マリアバン) 解析を用いたリスク指標の計算に関する研究が盛んである。E. Fournié et al. , “Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance” (1999) 3, Finance and Stochastics, 391-412, や D. Nualart, 『The Malliavin Calculus and Related Topics』, Springer-Verlag (Probability and its Applications), New York, 2nd edition, 2006, などを参考にするとよい。

4.6 付録：マリアバン解析の応用

4.6.1 Malliavin 解析

Malliavin(マリアバン)解析とは Wiener 過程の汎関数の解析である。ここでは、E. Fournié et al. (“Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance” (1999) 3, Finance and Stochastics, 391-412) の論文に基づいて、Malliavin 解析を使ったりリスク指標の求め方を簡単に解説する^{*20}。数学的に必要な細かい条件は省略して説明するので、詳しいことを知りたい人は Nualart(2006)などを参照すること。

W を Wiener 過程としたとき、

$$F(W) = f \left(\int_0^T h_1(u) dW(u), \int_0^T h_2(u) dW(u), \dots, \int_0^T h_n(u) dW(u) \right)$$

という形をした Wiener 過程 W の汎関数 F を Wiener 汎関数とよぶ。ここで、 f は $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の関数であり、 $h_i(u) (i = 1, 2, \dots, n)$ は適当な条件(積分が定義できるなどの条件)を満たす確定的な関数である。ここでは

^{*20}Malliavin 解析について詳しくは

- 『The Malliavin Calculus and Related Topics』, D. Nualart, Springer-Verlag (Probability and its Applications), New York, 2nd edition, 2006 (第2版では、Malliavin 解析のファイナンスへの応用が追加された。)
- 『確率解析』, 重川一郎, 岩波書店, 2008

などを参照せよ。ファイナンスへの応用については

『Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance』(Springer Finance), P. Malliavin, A. Thalmaier, Springer-Verlag, 2006 も詳しい。またインターネットで公開されているワーキングペーパーなどに参考になるものが多い。「Malliavin Calculus」 「Finance」などをキーワードに検索してみるとよい。

時間区間を $[0, T]$ に固定する. $W(t)$ (ブラウン運動の時刻 t での値), $S(t) = S_0 \exp\{\mu t + \sigma W(t)\}$ (幾何ブラウン運動の時刻 t での値), $\tilde{S}(t) := 1/t \int_0^t S(u) du$ (アジアンオプションの支払い) などは Wiener 汎関数とみなすことができる. 実際,

$$W(t) = \int_0^T 1_{[0,t]}(u) dW(u)$$

だから, $W(t)$ は Wiener 汎関数である. ここで,

$$1_{[0,t]}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq t \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. $S(t)$ は $W(t)$ の関数だから Wiener 汎関数. $\tilde{S}(t)$ は $\{S(u)\}_{0 \leq u \leq t}$ の関数であり, それゆえに $\{W(u)\}_{0 \leq u \leq t}$ の関数でもあるから, Wiener 汎関数である. よって, f を $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の関数としたとき, $f(W(t)), f(S(t)), f(\tilde{S}(t))$ などは Wiener 汎関数とみなせる.

4.6.2 Malliavin 微分

Wiener 汎関数 F に対して

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \partial_i f \left(\int_0^T h_1(u) dW(u), \int_0^T h_2(u) dW(u), \dots, \int_0^T h_n(u) dW(u) \right) h_i(t)$$

を満たす, 確率過程 $\{D_t F\}_{0 \leq t \leq T}$ を F の **Malliavin 微分** とよぶ. ここで, $\partial_i f$ は f の第 i 成分についての偏微分を表わす.

f が 1 次元の場合は

$$D_t F = f' \left(\int_0^T h(u) dW(u) \right) h(t)$$

となる. **以下では 1 次元の場合のみを扱う.** Malliavin 微分の例をいくつか挙げておく.

- $W(t)$ の Malliavin 微分は $W(t) = \int_0^T 1_{[0,t]}(u) dW(u)$ となることに注意すれば

$$D_s W(t) = 1_{[0,t]}(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t \\ 0, & s < t \end{cases} \quad (4.34)$$

となる.

- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のとき, $g(W(t))$ の Malliavin 微分は

$$D_s g(W(t)) = g'(W(t)) 1_{[0,t]}(s) = \begin{cases} g'(W(t)), & 0 \leq s \leq t \\ 0, & s < t \end{cases}$$

となる.

- $\int_0^T h(u) dW(u)$ の Malliavin 微分は

$$D_s \left(\int_0^T h(u) dW(u) \right) = h(s) \quad (4.35)$$

となる.

Malliavin 微分を直観的に理解してみよう. $[0, T]$ を n 区間に分割し, 分点を $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = T$ とおく. このとき, $(W(t_0), W(t_1), \dots, W(t_n))$ を Wiener 過程 $\{W(u)\}_{0 \leq u \leq T}$ を離散化したものと考え. Wiener 汎関数 $F(W)$ も離散化して考えて, $G(W(t_0), W(t_1), \dots, W(t_n))$ という n 次元関数を考える. 一般に, $W(t_k)$ は $\Delta W(t_i) := W(t_i) - W(t_{i-1})$ と定義すると,

$$W(t_k) = \sum_{i=1}^k \Delta W(t_i)$$

と表せる. よって, $G(W(t_0), W(t_1), \dots, W(t_n))$ を $\Delta W(t_i)$ の関数 $H(\Delta W(t_1), \Delta W(t_2), \dots, \Delta W(t_n))$ で表現することができる. このとき H の $\Delta W(t_i)$ に関する微分を考えて

$$D_{t_i} H = \frac{\partial}{\partial \Delta W(t_i)} H(\Delta W(t_1), \Delta W(t_2), \dots, \Delta W(t_i), \dots, \Delta W(t_n))$$

とする. n を無限大に近づけたとき ($[0, T]$ の分割を限りなく細かくしたとき) の $D_{t_i} H$ の行き先が, Malliavin 微分 $D_t F$ だと考えればよい. 要するに Malliavin 微分 $D_t F$ とは t 時点における Wiener 過程の増分 $dW(t)$ に衝撃を与えたとき ($dW(t)$ の値を少しずらしたとき), その衝撃が F に及ぼす影響を測る尺度と考えることができる.

たとえば, $W(t)$ は

$$W(t) = \sum_{i=1}^k \Delta W(t_i)$$

とかける. ただし, $t_k = t$ となるように分割がされているとする. このとき,

$$D_{t_j} W(t) = \frac{\partial}{\partial \Delta W(t_j)} \sum_{i=1}^k \Delta W(t_i)$$

だから, $t_j \leq t_k = t$ ならば $D_{t_j} W(t) = 1$, $t_j > t$ ならば $D_{t_j} W(t) = 0$ となる. これが (4.34) の直観的な導出である. さらに, $F(W) = \int_0^T h(u) dW(u)$ を離散化すると

$$H(\Delta W(t_0), \Delta W(t_1), \dots, \Delta W(t_n)) = \sum_{i=1}^n h(t_{i-1}) \Delta W(t_i)$$

となる. よって,

$$D_{t_j} H = h(t_{j-1})$$

となる. これが (4.35) の直観的な導出である. よって, Wiener 汎関数 F の Malliavin 微分 $D_t F$ とは

$$W(t) = \sum_{u \leq t} dW(u)$$

と考えて

$$D_s F = \frac{\partial F}{\partial (dW(s))}$$

と理解すればよさそうである*21.

*21 ちなみに, 最近 Dupire によって Malliavin 微分とは異なったパスの汎関数に関する微分が定義され応用が議論されている. 詳しくは

- B. Dupire “Functional Ito calculus” (2009), <http://arxiv.org/pdf/1002.2446>
- R. Cont and D. Fournié “Functional Ito calculus and stochastic integral representation of martingales” (2010), <http://arxiv.org/pdf/1002.2446>

を参照せよ. 経路依存型オプションのリスク指標へ応用ができるようだ.

つぎに**合成関数の微分公式**を紹介する。

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とし, F を Wiener 汎関数とすると

$$D_t \phi(F) = \phi'(F) D_t F$$

が成り立つ。

例をいくつか挙げておこう。幾何ブラウン運動にしたがう確率過程

$$S(t) = S_0 \exp \{ \mu t + \sigma W(t) \}$$

について, $D_t S(T)$ ($t \leq T$) を求めてみよう。 $S(T)$ は関数

$$\phi(x) = S_0 \exp \{ \mu t + \sigma x \}$$

を使えば,

$$S(T) = \phi \left(\int_0^T dW(u) \right)$$

という Wiener 汎関数みなすことができる。 $D_t \int_0^T dW(u) = D_t W(T) = 1$ であったことに注意すれば,

$$D_t S(T) = \phi' \left(\int_0^T dW(u) \right) \cdot D_t \int_0^T dW(u) = S(T) \sigma \cdot 1 = \sigma S(T) \quad (4.36)$$

となる。直感的に考えれば

$$S(T) = S_0 \exp \left\{ \mu t + \sigma \sum_{s \leq t} dW(s) \right\}$$

だから,

$$D_t S(T) = \frac{\partial S(T)}{\partial dW(t)} = S_0 \exp \left\{ \mu t + \sigma \sum_{s \leq t} dW(s) \right\} \frac{\partial}{\partial dW(t)} \left(\mu t + \sigma \sum_{s \leq t} dW(s) \right) = S(T) \sigma$$

となる。

4.6.3 Skorohod 積分

u を確率過程, F を Wiener 汎関数としたとき,

$$E \left[\int_0^T (D_t F) u(t) dt \right] = E [F \delta(u)] \quad (4.37)$$

を満たす作用素 δ を **Skorohod(スコロホッド) 積分** とよぶ。

いま \langle, \rangle を

$$\langle g, h \rangle = \int_0^T g(t) h(t) dt$$

と定義する。すなわち, \langle, \rangle は $L^2[0, T]$ 空間の内積である。このとき (4.37) は

$$E[\langle DF, u \rangle] = E[F \delta(u)]$$

と書くことができる。すなわち、 δ は D の共役作用素とみなすことができる。 u が適合過程の場合、Skorohod 積分 $\delta(u)$ は伊藤積分に等しい。すなわち

$$\delta(u) = \int_0^T u(t) dW(t)$$

となることが知られている。また、つぎの公式は非常に有用である。

u を確率過程、 F を Wiener 汎関数としたとき

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T (D_t F)u(t) dt \quad (4.38)$$

が成り立つ。

4.6.4 確率微分方程式と Malliavin 微分

確率微分方程式の解の Malliavin 微分を紹介しておく。まず、確率微分方程式

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad X(0) = x$$

を考える。 $Y(t)$ を $X(t)$ の 1 次変分過程、すなわち

$$dY(t) = \mu'(X(t))Y(t)dt + \sigma'(X(t))Y(t)dW(t), \quad Y(0) = 1 \quad (4.39)$$

を満たすものとする。これを用いると $X(T)$ の Malliavin 微分 $D_t X(T)$ ($t \leq T$) は

$$D_t X(T) = Y(T)Y(t)^{-1}\sigma(X(t)) \left(= \frac{Y(T)}{Y(t)}\sigma(X(t)) \right)$$

となることが知られている。 $t > T$ のときは $D_t X(T) = 0$ である。確率微分方程式

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0$$

について、 $D_t S(T)$ を計算してみよう。1 次変分過程は

$$dY(t) = rY(t)dt + \sigma Y(t)dW(t), \quad Y(0) = 1$$

となる。このとき

$$Y(t) = \frac{S(t)}{S_0}$$

であることに注意すれば、

$$D_t S(T) = \frac{Y(T)}{Y(t)}\sigma S(t) = S_0 Y(T)\sigma = \sigma S(T)$$

となる。これは合成関数の微分公式を使った結果 (4.36) と等しい。

4.5.2 項で説明したパスごとの微分法では、確率微分方程式の解 $X(t)$ の初期値に関する微分 $\partial X(t)/\partial X(0)$ を計算する必要があった。かりにこの微分が明示的に計算できない場合でも (4.39) を用いれば $\partial X(t)/\partial X(0)$ の近似値を求めることが可能である。

4.6.5 Malliavin 解析を使ったリスク指標の計算

ϕ を割り引かれた支払い関数, $S(T)$ を原資産とすると, 4.5.2 項におけるパスごとの微分法ではデルタを

$$\frac{d}{dS_0} E[\phi(S(T))] = E \left[\phi'(S(T)) \frac{dS(T)}{dS_0} \right] \quad (4.40)$$

により計算した. (4.40) が成り立つためには ϕ の連続性が必要であった. よって ϕ が連続性をもたない場合がまず問題になった. いま G を適当な確率変数としたとき

$$E[\phi'(S(T))G] = E[\phi(S(T))\pi]$$

となる π を探すことを考える. そして不連続性を持つ ϕ に対しても

$$\frac{d}{dS_0} E[\phi(S(T))] = E[\phi(S(T))\pi] \quad (4.41)$$

となることが示せれば (4.41) の右辺を計算することによりデルタが求まるだろう. 尤度比法はこれを実現するひとつの方法であった.

まず一般的に考える. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で 1 階微分可能な関数, F を Wiener 汎関数, G を確率変数, $\{u(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ を確率過程とする. このとき, 合成関数の微分公式より

$$D_t \phi(F) = \phi'(F) D_t F$$

となる. この両辺に $G u(t)$ をかけて積分をすると

$$\int_0^T D_t \phi(F) G u(t) dt = \int_0^T \phi'(F) D_t F G u(t) dt = \phi'(F) G \int_0^T D_t F u(t) dt$$

となる. よって,

$$\phi'(F) G = \frac{\int_0^T D_t \phi(F) G u(t) dt}{\int_0^T D_t F u(t) dt}$$

となり, Skorohod 積分の定義から

$$\begin{aligned} E[\phi'(F)G] &= E \left[\frac{\int_0^T D_t \phi(F) G u(t) dt}{\int_0^T (D_t F) u(t) dt} \right] \\ &= E \left[\int_0^T D_t \phi(F) \frac{G u(t)}{\int_0^T (D_t F) u(t) dt} dt \right] \\ &= E \left[\phi(F) \delta \left(\frac{G u(\cdot)}{\int_0^T (D_t F) u(t) dt} \right) \right] \end{aligned}$$

となる. ここで得られた関係式

$$E[\phi'(F)G] = E \left[\phi(F) \delta \left(\frac{G u(\cdot)}{\int_0^T (D_t F) u(t) dt} \right) \right] \quad (4.42)$$

がリスク指標を計算する上で鍵となる.

例題 4.7 (Black-Scholes モデルにおけるヨーロピアンオプション) Black-Scholes モデル

$$S(T) = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right\}$$

において, $V = E[e^{-rT} f(S(T))]$ のデルタ $\partial V / \partial S_0$ を計算してみよう. f が 1 階微分可能な関数 (有限個の点で微分不可能であっても連続であればよい) のとき

$$\frac{\partial}{\partial S_0} E [e^{-rT} f(S(T))] = e^{-rT} E \left[\frac{\partial f(S(T))}{\partial S_0} \right] = e^{-rT} E \left[f'(S(T)) \frac{\partial S(T)}{\partial S_0} \right] = \frac{e^{-rT}}{S_0} E [f'(S(T)) S(T)]$$

となる. これに $G = S(T), u(t) \equiv 1$ として (4.42) を適用すれば

$$\frac{\partial V}{\partial S_0} = \frac{e^{-rT}}{S_0} E \left[f(S(T)) \delta \left(\frac{S(T)}{\int_0^T D_t S(T) dt} \right) \right]$$

となる. $D_t S(T) = \sigma S(T)$ であったことに注意すれば, この右辺の期待値は $E [f(S(T)) \delta (\frac{1}{\sigma T})]$ となる. $1/\sigma T$ は実数なので (適合過程であるから)

$$\delta \left(\frac{1}{\sigma T} \right) = \int_0^T \frac{1}{\sigma T} dW(t) = \frac{W(T)}{\sigma T}$$

となり, 結局,

$$\frac{\partial V}{\partial S_0} = \frac{e^{-rT}}{S_0} E \left[f(S(T)) \frac{W(T)}{\sigma T} \right] \quad (4.43)$$

となる. これは (4.32) や (4.33) と整合していることが分かるだろう. また, f に不連続な点があっても L^2 に含まれる関数, もしくは区分的に連続な関数であれば (4.43) が成り立つことが知られている. 証明は Fournié et al. (1999) などを参照せよ. よってデジタルオプションについても (4.43) を適用することができる.

例題 4.8 (Black-Scholes モデルにおける連続型アジアンオプション) 連続型の場合には $\int_0^T S(t) dt$ の密度関数が明示的に分からないのでリスク指標の計算が難しかったが, Malliavin 微分を使うと上手く行く. まず, $\bar{S}(T) := 1/T \int_0^T S(t) dt$ の Malliavin 微分を計算しておこう.

$$D_t \bar{S}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T D_t S(u) du = \frac{1}{T} \int_t^T \sigma S(u) du$$

となる. ここで, $D_t S(u) = \sigma S(u)$ ($t \leq u$), 0 ($t > u$) となることを使っている. さて, $V = E[e^{-rT} f(\bar{S}(T))]$ としたとき $\partial V / \partial S_0$ を計算したい. ここで f ははじめは微分可能な関数とするが, 結局は L^2 に含まれる関数であればよい.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S_0} &= e^{-rT} E \left[\frac{\partial}{\partial S_0} f(\bar{S}(T)) \right] = e^{-rT} E \left[f'(\bar{S}(T)) \frac{\partial}{\partial S_0} \bar{S}(T) \right] \\ &= e^{-rT} E \left[f'(\bar{S}(T)) \int_0^T \frac{\partial S(u)}{\partial S_0} du \right] = \frac{e^{-rT}}{S_0} E [f'(\bar{S}(T)) \bar{S}(T)] \end{aligned}$$

となる。ここで $G = \bar{S}(T), u(t) = S(t)$ として^{*22}(4.42) を用いて

$$\begin{aligned} E[f'(\bar{S}(T))\bar{S}(T)] &= E\left[f(\bar{S}(T))\delta\left(\frac{\bar{S}(T)S(\cdot)}{\int_0^T D_t\bar{S}(T)S(t)dt}\right)\right] \\ &= E\left[f(\bar{S}(T))\delta\left(\frac{\bar{S}(T)S(\cdot)}{\int_0^T S(t)\left(\frac{\sigma}{T}\int_t^T S(u)du\right)dt}\right)\right] \\ &= E\left[f(\bar{S}(T))\delta\left(\frac{\bar{S}(T)S(\cdot)}{\frac{\sigma}{2T}\left(\int_0^T S(t)dt\right)^2}\right)\right] = E\left[f(\bar{S}(T))\frac{2}{\sigma}\delta\left(\frac{S(\cdot)}{\int_0^T S(t)dt}\right)\right] \end{aligned}$$

となる。最後の項の Skorohod 積分を計算する。部分積分の公式 (4.38) を適用すると

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{S(\cdot)}{\int_0^T S(t)dt}\right) &= \frac{1}{\int_0^T S(t)dt}\delta(S) - \int_0^T D_t\left(\frac{1}{\int_0^T S(t)dt}\right)S(t)dt \\ &= \frac{\int_0^T S(t)dW(t)}{\int_0^T S(t)dt} + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{\left(\int_0^T S(t)dt\right)^2}\left(D_t\int_0^T S(t)dt\right)S(t)dt \\ &= \frac{\int_0^T S(t)dW(t)}{\int_0^T S(t)dt} + \frac{1}{2\left(\int_0^T S(t)dt\right)^2}\int_0^T \sigma S(t)\left(\int_t^T S(u)du\right)dt \\ &= \frac{\int_0^T S(t)dW(t)}{\int_0^T S(t)dt} + \frac{\sigma}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$E[f'(\bar{S}(T))\bar{S}(T)] = \frac{2}{\sigma}\frac{\int_0^T S(t)dW(t)}{\int_0^T S(t)dt} + 1.$$

ここで、

$$\int_0^T S(t)dW(t) = \frac{1}{\sigma}\left(S(T) - S(0) - r\int_0^T S(t)dt\right)$$

だから、

$$E[f'(\bar{S}(T))\bar{S}(T)] = \frac{2(S(T) - S(0))}{\sigma^2\int_0^T S(t)dt} - \frac{2r}{\sigma^2} + 1 = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{S(T) - S(0)}{\int_0^T S(t)dt} - r + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

以上より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S_0} &= \frac{2e^{-rT}}{S_0\sigma^2}E\left[f(\bar{S}(T))\left(\frac{S(T) - S(0)}{\int_0^T S(t)dt} - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2e^{-rT}}{S_0\sigma^2T}E\left[f(\bar{S}(T))\left(\frac{S(T) - S(0)}{\bar{S}(T)} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right] \end{aligned}$$

となる。

^{*22} $u(t) \equiv 1$ とすると上手く行かない。以下の議論でどこが上手く行かなくなるだろうか？

4.6.6 分散減少法

パスごとの微分法と Malliavin 微分を使う方法 (または尤度比法) の両方が適用できる場合にはどちらを用いたほうがよいだろうか. この2つの方法の大きな違いは推定量の分散にある. 結論から言えば Malliavin 微分を (そのまま) 使う方法のほうが推定量の分散が大きくなる. たとえば, E. Fournié et al.(2001) (“Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II” (2001) 5, Finance and Stochastics, 201-236) などを参照せよ.

Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパコールオプションで2つの方法の違いを見てみよう. パスごとの微分法と Malliavin 微分による方法 (尤度比法) から得られるデルタはそれぞれ

$$e^{-rT} E \left[I \{S(T) > K\} \frac{S(T)}{S_0} \right], e^{-rT} E \left[(S(T) - K)^+ \frac{W(T)}{\sigma T S_0} \right]$$

であった. この2つを比較したものが図 4.9 である. たしかにパスごとの微分法のほうが分散が小さそうである. Malliavin 微分による方法のほうが分散が大きくなる理由は重み $W(T)/T$ の分散が大きいいことにある.

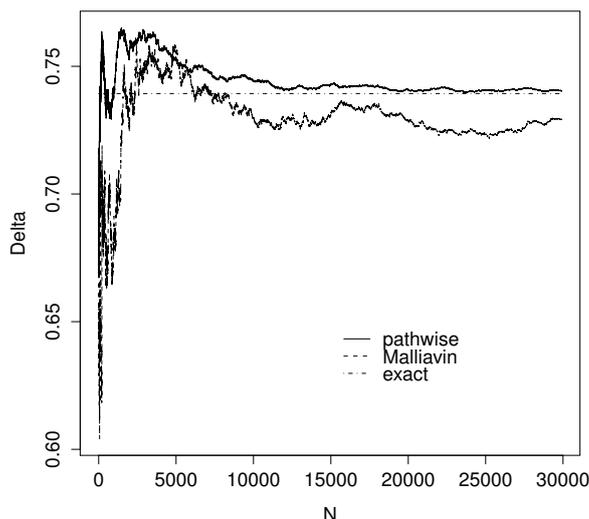


図 4.9 パスごとの微分法と Malliavin 微分による方法 (尤度比法) の比較. $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $T = 5/12$, $K = 60$, $S_0 = 62$, N はパスの数, 解析解は 0.7393.

よって, 両方の方法が使える場合にはパスごとの微分法を用いた方がよい. パスごとの微分法が使えない場合の一つとして支払い関数が不連続性を持つ場合が挙げられた (4.5.2 項を参照). よって, 支払い関数が不連続性を持つ場合には尤度比法か Malliavin 微分による方法を使わなければならないが, この場合でも局所化をすることによりパスごとの微分法を (一部に) 適用することができる. 例で説明しよう.

例題 4.9 (Black-Scholes モデルにおけるデジタルオプションのデルタ) $I\{S(T) > K\}$ という支払い関数をもつデジタルオプションに対しては, 支払い関数が $S(T) = K$ において不連続性を持つためパスごとの微

分法は適用できなかった。そこで $f(x) = I\{x > K\}$ という支払い関数をつぎのように分解 (局所化) する。

$$f(x) = G_\delta(x) + F_\delta(x)$$

$$G_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < K - \delta \\ \frac{1}{2\delta^2} [x - (K - \delta)]^2, & K - \delta \leq x < K \\ -\frac{1}{2\delta^2} [x - (K + \delta)]^2 + 1, & K \leq x < K + \delta \\ 1, & K + \delta \leq x \end{cases}$$

$$F_\delta(x) = I\{x > K\} - G_\delta(x).$$

ここで、 $\delta > 0$ は適当に設定すべき定数である。 $G_\delta(x)$ は連続なのでこの部分にはパスごとの微分法を適用し、 $F_\delta(x)$ の部分には尤度比法 (Malliavin 微分による方法) を適用する。すなわち、不連続点である $x = K$ の周辺では尤度比法を用いて、それ以外の部分ではパスごとの微分法を使うのである。こうすれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_0} E [e^{-rT} I\{S(T) > K\}] &= \frac{\partial}{\partial S_0} E [e^{-rT} G_\delta(S(T))] + \frac{\partial}{\partial S_0} E [e^{-rT} F_\delta(S(T))] \\ &= E \left[e^{-rT} G'_\delta(S(T)) \frac{S(T)}{S_0} \right] + E \left[e^{-rT} F_\delta(S(T)) \frac{W(T)}{\sigma T S_0} \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

となる。ここで

$$G'_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < K - \delta \\ \frac{1}{\delta^2} [x - (K - \delta)], & K - \delta \leq x < K \\ -\frac{1}{\delta^2} [x - (K + \delta)], & K \leq x < K + \delta \\ 0, & K + \delta < x \end{cases}$$

である。(4.44) を使ってデルタを計算した結果が図 4.9 に示されている。局所化したほうが分散が小さいことが分かる。この例では $\delta = 10$ と設定している。 δ は小さすぎても大きすぎてもいけない。

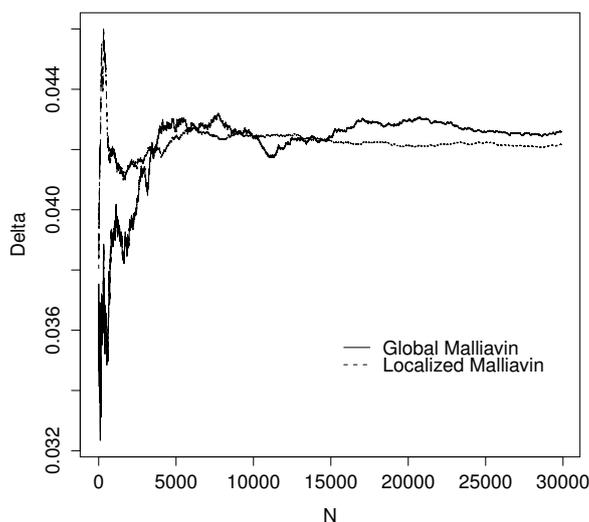


図 4.10 通常の尤度比法 (Global Malliavin) と局所化した尤度比法 (Localized Malliavin) の比較。
 $r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5/12, K = 60, S_0 = 62, N$ はパスの数, $\delta = 10$

4.6.7 条件付き期待値の計算

F, G を (1次元の) 確率変数とし, その同時密度関数が存在することを仮定しその密度関数を $p_{F,G}(x, y)$ と書く. また, F, G の周辺密度関数をそれぞれ p_F, p_G と書く. このとき条件付き期待値 $E[\phi(F)|G = \alpha]$ は

$$E[\phi(F)|G = \alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{p_{F,G}(x, \alpha)}{p_G(\alpha)} dx$$

により定義される. 密度関数の存在は分かっているが関数の形が明示的に分からない場合にどのように条件付き期待値を計算したらよいであろうか. そのひとつの方法が 5 節で紹介した最小 2 乗モンテカルロ法であった. ここでは E. Fournié et al.(2001)(“Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II” (2001) 5, Finance and Stochastics, 201-236) にしたがって Malliavin 解析をつかった条件付き期待値の近似法を紹介する. 以後, F, G を適当な条件を満たす Wiener 汎関数とする.

まず $E[\phi(F)|G = \alpha]$ は形式的に

$$E[\phi(F)|G = \alpha] = \frac{E[\phi(F)\varepsilon(G - \alpha)]}{E[\varepsilon(G - \alpha)]} \quad (4.45)$$

と書けることに着目する. ここで ε は (ディラックの) デルタ関数と呼ばれるものである*23. デルタ関数 ε とは任意の連続関数 f に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varepsilon(x)dx = f(0) \quad (4.46)$$

となるような「関数」 ε のことである. デルタ関数は

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

と書くこともできる. また (4.46) において $f(x) \equiv 1$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x)dx = 1 \quad (4.48)$$

を満たすことも分かる. これから分かるようにデルタ関数は通常の意味での関数ではなく, 超関数とよばれる関数のひとつである. ここでは超関数の議論に深入りすることなく, デルタ関数とは (4.46), (4.48), (4.47) を満たす関数であるだけ理解しておく. また, 簡単のため

$$\varepsilon(x - \alpha) = \varepsilon_\alpha(x)$$

と表記する. ε_α はつぎの関係を満たす.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varepsilon_\alpha(x)dx = f(\alpha), \quad \varepsilon_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \alpha \\ \infty, & x = \alpha. \end{cases}$$

すると (4.45) の右辺ははつぎのように計算できる*24.

$$\begin{aligned} \frac{E[\phi(F)\varepsilon(G - \alpha)]}{E[\varepsilon(G - \alpha)]} &= \frac{E[\phi(F)\varepsilon_\alpha(G)]}{E[\varepsilon_\alpha(G)]} = \frac{\iint \phi(x)\varepsilon_\alpha(y)p_{F,G}(x, y)dx dy}{\int \varepsilon_\alpha(y)p_G(y)dy} = \frac{\int \phi(x)p_{F,G}(x, \alpha)dx}{p_G(\alpha)} \\ &= \int \phi(x) \frac{p_{F,G}(x, \alpha)}{p_G(\alpha)} dx. \end{aligned}$$

*23 通常デルタ関数は δ と書くが, このノートではスコロホッド積分に δ を使ってしまったので, デルタ関数を ε と書いている.

*24 積分区間を省略したら $-\infty$ から ∞ までの積分だと解釈する. すなわち $\int = \int_{-\infty}^{\infty}$

よって、条件付き期待値を計算するには $E[\phi(F)\varepsilon_\alpha(G)]/E[\varepsilon_\alpha(G)]$ を評価してもよいことが分かる。無条件期待値の割り算なのでモンテカルロ法が適用できそうだが式にデルタ関数が入っているため計算が難しい。デルタ関数をなんらかの計算しやすい関数で近似する方法（カーネル法）もあるが、ここではマリアバン解析を使った方法を紹介する。

デルタ関数 ε を $-\infty$ から x まで積分した関数 $H(x)$

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \varepsilon(t) dt$$

をヘビサイド（Heaviside）関数とよぶ。ヘビサイド関数は具体的につぎのように書ける。

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \varepsilon(t) dt = \int 1_{(-\infty, x]}(t) \varepsilon(t) dt = 1_{(-\infty, x]}(0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$1_A(x)$ は定義関数である。ヘビサイド関数はいわゆる階段関数となる。また形式的に

$$H'(x) = \varepsilon(x)$$

と考えることもできよう。また $H_\alpha(x) = H(x - \alpha)$ と定義しておく。するとつぎの定理が証明できる。

確率過程 $u(t)$ を

$$E \left[\int_0^T D_t G \cdot u(t) dt \middle| F, G \right] = 1 \quad (4.49)$$

を満たすものとする。このとき

$$E[\phi(F)|G = \alpha] = \frac{E \left[\phi(F) H_\alpha(G) \delta(u) - \phi'(F) H_\alpha(G) \int_0^T D_t F \cdot u(t) dt \right]}{E[H_\alpha(G) \delta(u)]} \quad (4.50)$$

が成り立つ。さらに $u(t)$ を

$$E \left[\int_0^T D_t F \cdot u(t) dt \middle| F, G \right] = 0$$

を満たすものすると

$$E[\phi(F)|G = \alpha] = \frac{E[\phi(F) H_\alpha(G) \delta(u)]}{E[H_\alpha(G) \delta(u)]} \quad (4.51)$$

が成り立つ。

(4.50) の証明の概略を述べよう。マリアバン微分の性質から

$$D_t \{ \phi(F) H_\alpha(G) \} = \phi'(F) D_t F \cdot H_\alpha(G) + \phi(F) \cdot \varepsilon_\alpha(G) D_t G.$$

両辺に $u(t)$ をかけて積分をし、さらに期待値をとると

$$E \left[\int_0^T D_t \{ \phi(F) H_\alpha(G) \} u(t) dt \right] = E \left[\int_0^T \phi'(F) D_t F \cdot H_\alpha(G) \cdot u(t) dt \right] + E \left[\int_0^T \phi(F) \cdot \varepsilon_\alpha(G) D_t G \cdot u(t) dt \right]$$

となり、(4.49) を使うと

$$E[\phi(F)\varepsilon_\alpha(G)] = E \left[\int_0^T D_t \{ \phi(F) H_\alpha(G) \} u(t) dt \right] - E \left[\phi'(F) H_\alpha(G) \int_0^T D_t F \cdot u(t) dt \right]$$

となる。これが(4.50)の右辺の分母である。分子は $\phi(F) \equiv 1$ と考えれば同様に証明できる。ヘビサイド関数の(マリアバン)微分を直接計算することはできないので、厳密に証明するには一度デルタ関数を適当なマリアバン微分可能な関数で近似して、その後極限操作をする必要がある。詳しくはFournié et al.(2001)を見よ。

確率微分方程式

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

の解 X に対して $E[\phi(X(T))|X(t) = x]$ を計算するために(4.51)を使うには

$$u(s) = \frac{Y(s)}{\sigma(X(s))Y(s)} \left\{ \frac{1}{t} 1_{(0,t)}(s) - \frac{1}{T-t} 1_{(t,T)}(s) \right\}$$

とおけばよく、結果

$$E[\phi(X(T))|X(t) = x] = \frac{E[\phi(F)H_x(G)\delta(u)]}{E[H_x(G)\delta(u)]}$$

である。ここで $Y(t)$ は $X(t)$ の1次変分過程である。またスコロホッド積分 $\delta(u)$ はつぎのように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta(u) = & \frac{1}{Y(t)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \frac{Y(s)}{\sigma(X(s))} dW(s) - \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{Y(s)}{\sigma(X(s))} dW(s) \right) \\ & + \frac{Z(t)}{Y^2(t)} + \frac{1}{tY(t)} \int_0^t \frac{\sigma'(X(s))}{\sigma(X(s))} Y(s) ds - \frac{1}{tY(t)} \int_0^t \frac{Z(s)}{Y(s)} ds. \end{aligned}$$

ここで $Z(t)$ は

$$dZ(t) = (\mu'(X(t))Z(t) + \mu''(X(t))Y^2(t)) dt + (\sigma'(X(t))Z(t) + \sigma''(X(t))Y^2(t)) dW(t), \quad Z(0) = 0$$

の解である。

例題 4.10 (幾何ブラウン運動の場合) 幾何ブラウン運動

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0$$

の解 $S(t)$ に対して、 $E[\phi(S(T))|S(t) = S]$ を計算してみると

$$E[S(T)|S(t) = S] = \frac{E \left[\phi(S(T)) H_S(S(t)) \frac{1}{S(t)} \left(\frac{TW(t) - tW(T)}{T-t} + \sigma t \right) \right]}{E \left[H_S(S(t)) \frac{1}{S(t)} \left(\frac{TW(t) - tW(T)}{T-t} + \sigma t \right) \right]} \quad (4.52)$$

となる。

ところが $T-t$ が非常に小さいときに(4.52)をつかって計算をすると誤差が非常に大きくなってしまふことが知られている。これは $(TW(t) - tW(T))/(T-t)$ の部分の分散が非常に大きくなってしまふことに起因している。これを解消するために局所化が必要になる。局所化については

- B. Bouchard, I. Ekeland, N. Touzi “On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations”(2004) 8, Finance and Stochastics, 45-71
- V. Bally, L. Caramellino, A. Zanette, “Pricing and hedging american options by Monte Carlo using a Malliavin calculus approach”(2005) 11, Monte Carlo Methods and Applications, 97-133

などを参照せよ。

4.7 アメリカンオプションの価格付け

4.7.1 アメリカンオプション

あらかじめ決められた時点 T でのみ行使ができるオプションをヨーロピアンオプションと呼んだ。一方、オプションの買い手が行使時点を自分で選べるオプションを**アメリカンオプション**とよぶ。行使時点は停止時刻とよばれる概念で定義する。任意の $t > 0$ に対して、確率変数 τ に関する事象

$$\{\tau < t\}$$

が成り立っているかどうかを t 時点までの情報で判断できるとき、 τ を**停止時刻**とよぶ。直感的には、停止時刻 τ は繰り返し行われる賭けを止める規則のようなものである。ただし、賭けを止めるかどうかは現時点までの情報（現時点までの賭けの結果）によって決めなければならない。ある時点までの賭けの結果はランダムなので停止時刻もランダムである。

いま t 時点におけるオプションの支払いを $f(S(t))$ とし、停止時刻 τ^* を所与とする。するとオプションの支払いは $f(S(\tau^*))$ となり、 $f(S(\tau^*))$ は満期時点までの情報で支払い額が確定するので、マルチンゲールアプローチによればその価格は

$$E \left[e^{-r\tau^*} f(S(\tau^*)) \right]$$

となる。実際には τ^* は所与ではなく、オプションの買い手は自分にとってもっとも有利な τ^* を選ぶだろうから、オプションの価格は

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E \left[e^{-r\tau} f(S(\tau)) \right] \quad (4.53)$$

としなければならない。ここで $\mathcal{T}_{0,T}$ は $[0, T]$ に値をとる停止時刻の集合を表す。(5.1)の問題を最適停止問題といい、その解を最適停止時刻とよぶ。最適停止時刻はつぎのように特徴づけられる。まず

$$V(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} E[e^{-r(\tau-t)} f(S(\tau)) | S(t) = x] \quad (4.54)$$

とする。ここで $V(t, S(t)) \geq f(S(t))$ であることに注意する。すると最適停止時刻 τ^* は

$$\tau^* = \inf \{ t \in [0, T] : V(t, S(t)) \leq f(S(t)) \}$$

によって与えられ、さらに

$$V_0 = \phi(0)S(0) + \eta(0)B(0) \text{ かつ } \phi(t)S(t) + \eta(t)B(t) \geq f(t, S(t))$$

となる（優）複製ポートフォリオ (ϕ, η) が存在する。合理的な投資家は

$$V(t, S(t)) > f(S(t))$$

のときにはオプションを行使せず、 $V(t, S(t)) = f(S(t))$ となる t でオプションを行使することになる。集合

$$C = \{(t, x) : V(t, x) > f(x)\}$$

を**継続領域**とよぶことがある。

また (5.2) はつぎの変分不等式を満たすことが知られている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + rs \frac{\partial V}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) - rV(t, x) &\leq 0, \quad V(t, x) \geq f(x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, \infty) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + rs \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) - rV(t, x) \right) (V(t, x) - f(x)) &= 0, \quad (t, s) \in [0, T] \times [0, \infty) \\ V(T, x) &= f(x). \end{aligned} \quad (4.55)$$

じつは一般にはアメリカンオプションの価格 (1.42) の解析的な表現は見つかっていない。一番単純だと思われる Black-Scholes モデルにおけるアメリカンプットオプションにさえ解析的な解は見つかっていない*25。よって、アメリカンオプションの価格を求めるには何らかの数值計算が必ず必要になる。

4.7.2 動的計画法によるアメリカンオプションの価格付け

動的計画法を用いたアメリカンオプションの価格付けを紹介する。 $\{S(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ を (マルコフ性をもつ) 確率過程とし、オプションの支払い関数を $f(x)$ とすると、アメリカンオプションの価格 V_0 は

$$V_0 = \sup_{\tau \in T} E[e^{-r\tau} f(S(\tau))]$$

で与えられた。 $T_{0,T}$ は $[0, T]$ に値をとる停止時刻の集合である。アメリカンオプションは期間 $[0, T]$ における任意の時刻に権利行使できるが、ここでは $[0, T]$ における時刻

$$0(=t_0) < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$$

においてのみ権利行使できるオプションを考える。これをバミューダオプション (Bermudan option) と呼ぶことがある。簡単のため

$$t_{i+1} - t_i = \frac{T}{M} \quad (:= \Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, M$$

と仮定する。 M を十分大きくとればバミューダオプションの価格はアメリカンオプションの価格に近づくから、バミューダオプションをアメリカンオプションの近似と考えてもよいし、はじめからバミューダオプションの価格付けをすると考えてもよい。この場合

$$V_0 = \sup_{\tau \in T_{0,M}} E[e^{-r\tau} f(S(\tau))] \quad (4.56)$$

を解くことになる。 $T_{0,M}$ は t_0, \dots, t_M に値をとる停止時刻の集合である。 V_0 はつぎの動的計画方程式を後ろ向きに解くことによって得られる。

$$\begin{cases} V_M := f(S(T)) \\ V_{i-1} := \max\{f(S(t_{i-1})), E[e^{-r\Delta t} V_i | S(t_{i-1})]\}, \quad 1 \leq i \leq M. \end{cases} \quad (4.57)$$

ここで V_i は t_i 時点までにオプションが行使されないと仮定したときの、 t_i 時点におけるオプションの価値を表す。また τ^* は

$$\tau^* = \min\{t_i, 0 \leq i \leq M \mid f(S(t_i)) \geq V_i\}$$

によって求まる。

*25 アメリカンコールオプションは満期時点で行使することが最適であることが知られている。すなわち、アメリカンコールオプションの価格はヨーロピアンコールオプションの価格に等しい。ただし配当がない場合に限る。

動的計画方程式 (5.5) を停止時刻を主役書き換えるとつぎようになる。まず τ_i^* ($0 \leq i \leq M$) を

$$\tau_i^* = \min\{t_k, i \leq k \leq M \mid h(S(t_i)) \geq V_i\}$$

と定義すると, τ_0^* が求めたい最適停止時刻 τ^* である。 τ_i^* はつぎのように求まる。

$$\begin{cases} \tau_M^* := T \\ \tau_{i-1}^* := t_{i-1} 1_{A_{i-1}} + \tau_i^* 1_{A_{i-1}^c}, 1 \leq i \leq M. \end{cases} \quad (4.58)$$

ここで

$$A_{i-1} = \left\{ h(S(t_{i-1})) > E \left[e^{-r(\tau_i^* - t_{i-1})} h(S(\tau_i^*)) \mid S(t_{i-1}) \right] \right\}$$

であり, A_{i-1}^c は A_{i-1} の補集合を表す。

4.7.3 2項モデルによるアメリカンオプションの価格付け

モンテカルロ法による価格付けを見る前に, 2項モデル^{*26}における価格付けを見ておこう。(リスク中立確率のもとでの) Black-Scholes モデル

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), S(0) = s_0 > 0 \quad (4.59)$$

を原資産とするアメリカンオプションを考える。確率微分方程式 (5.7) の解が

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (4.60)$$

であることを利用して, 原資産価格のツリーを構成してみよう。(4.60) において不確実性をもつのはブラウン運動 $\{W(t)\}$ の部分だけである。よって, ブラウン運動 $\{W(t)\}$ を近似する図 5.1 のようなツリー $\{W_{i,j}\}$ を構成すれば, そこから $\{S(t)\}$ を近似するツリー $\{S_{i,j}\}$ を構成することができる。ブラウン運動 $\{W(t)\}$ を近似する 2 項ツリー $\{W_{i,j}\}_{i=0,\dots,N,j=0,\dots,i}$ を構成しよう。時間空間 $[0, T]$ を N 等分し, $\Delta t = T/N$, $t_i = i\Delta t$ ($i = 0, 1, \dots, N$) とおく。 $W_{i,j}$ は時刻 t_i において, ブラウン運動が j 回上昇した節点 (ノード) を表す (これを (i, j) ノードとよぶ)。また, $W_{i,j} = w$ のとき, $W_{i+1,j+1} = w + u$, $W_{i+1,j} = w + d$ とし ($d < 0$), $W_{i,j}$ から $W_{i+1,j+1}$, $W_{i+1,j}$ に推移する確率をそれぞれ, $p, 1-p$ とおく (図 5.2)。すなわち, ブラウン運動のツリーでは p の確率で u だけ上昇し, $1-p$ の確率で d だけ上昇 ($-d$ だけ下降) する。以上の設定のもとで, ブラウン運動の振る舞いに整合するように, パラメータ u, d, p を決定する。

ベクトル W_i を $W_{i,1}, W_{i,2}, \dots, W_{i,j}$ のいずれかの値をとる確率変数とする。2項モデルにおいて, 時刻 t_i で W_i の値が w であるという条件のもとでの W_{i+1} の期待値は

$$E[W_{i+1} \mid W_i = w] = p(w + u) + (1-p)(w + d) = w + pu + (1-p)d \quad (4.61)$$

となる。一方, $W(t_i) = w$ という条件のもとでのブラウン運動 $W(t_i + \Delta t)$ の期待値は

$$\begin{aligned} E[W(t_i + \Delta t) \mid W(t_i) = w] &= E[W(t_i + \Delta t) - W(t_i) + W(t_i) \mid W(t_i) = w] \\ &= w + E[W(t_i + \Delta t) - W(t_i)] \\ &= w \end{aligned} \quad (4.62)$$

^{*26}Cox, Ross, and Rubinstein ("Option Pricing: A Simplified Approach", J.Financial Economics, 7(1979) 229-263) が最初に提案した方法と言われている。CRR モデルとも言う。

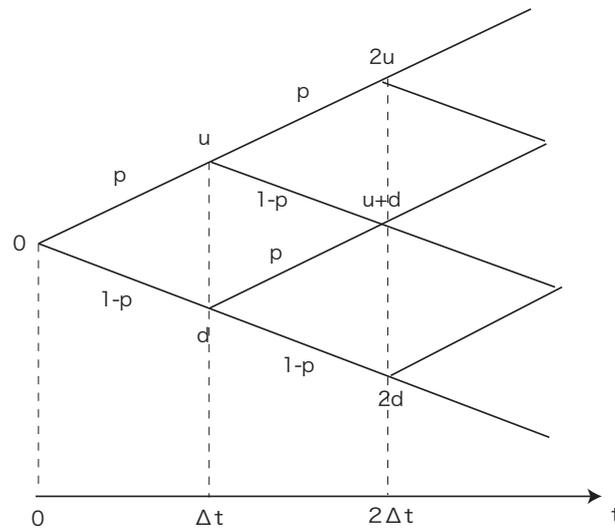


図 4.11 ブラウン運動の 2 項モデル

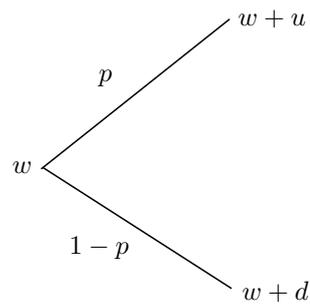


図 4.12

となる. (4.61) と (4.62) より

$$w + pu + (1 - p)d = w \Leftrightarrow pu + (1 - p)d = 0 \quad (4.63)$$

となる. つぎに分散を合わせる. 2 項モデルの条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[W_{i+1}|W_i = w] &= p(w + u)^2 + (1 - p)(w + d)^2 - (p(w + u) + (1 - p)(w + d))^2 \\ &= p(w + u)^2 + (1 - p)(w + d)^2 - w^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

となる. 一方, ブラウン運動の条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[W(t_i + \Delta t)|W(t_i) = w] &= V[W(t_i + \Delta t) - W(t_i) + W(t_i)|W(t_i) = w] \\ &= V[W(t_i + \Delta t) - W(t_i)] \\ &= \Delta t \end{aligned} \quad (4.65)$$

となる. (4.64) と (4.65) より

$$p(w + u)^2 + (1 - p)(w + d)^2 - w^2 = \Delta t \quad (4.66)$$

となる。(4.63)と(4.66)をみたす u, d, p を決めればよいが、自由度が1つある。ここでは、 $d = -u$ と設定してみよう。すると、(4.63)と(4.66)は

$$pu + (1-p)(-u) = 0, \quad p(w+u)^2 + (1-p)(w-u)^2 - w^2 = \Delta t$$

となる。これを解くと

$$p = \frac{1}{2}, \quad u = \sqrt{\Delta t}, \quad d = -\sqrt{\Delta t}$$

が得られる。これらのパラメータをもとにブラウン運動を近似するツリー $\{W_{i,j}\}$ をつくり、それに応じて株価のツリーを

$$S_{i,j} = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t_i + \sigma W_{i,j} \right\}$$

によってつくればよい。

これらをもとに、たとえばヨーロピアンコールオプションの価格を求めるには以下のようにする。ヨーロピアンオプションの場合、満期 T における支払いを無リスク金利で現在に割り引いたもの(リスク中立確率のもとでの)期待値を取ればよかった。 (i, j) ノードにおけるオプションの価格を $V_{i,j}$ とおく。設定によりノード (i, j) における原資産価格は $S_{i,j} = S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t_i + \sigma W_{i,j}\}$ である。すると、満期における支払いは

$$V_{N,j} = (S_{N,j} - K)^+, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.67)$$

となる。よって、オプションの価格は

$$\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} e^{-rT} (S_{N,j} - K)^+ \quad (4.68)$$

によって求めることができる。または、(4.67)から始めて、 $i \leq N-1$ 時点におけるオプションの価格を

$$V_{i,j} = e^{-r\Delta t} (pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j}), \quad i = N-1, N-2, \dots, 0, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

と後ろ向きにつきつぎと計算していくと $V_{0,0}$ が求めたいオプション価格になる^{*27}。

プログラムを書くときつぎのようになる。

```
CRREcall <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  W <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #ブラウン運動行列の初期化
  S <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #株価行列の初期化
  V <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #オプション価格行列の初期化
  delta <- T/N #時間間隔
  u <- sqrt(delta) #上昇の大きさ
  d <- -sqrt(delta) #下降の大きさ
  p <- 0.5 #リスク中立確率
#----- 株価ツリーの構築 -----
  mu <- r - 0.5 * sigma^2
  for (i in 0:N){
```

^{*27}Rで実装する場合、添字が1から始まることに注意。

```

    for (j in 0:i){
      W[i+1,j+1] <- j * u + (i - j) * d
      S[i+1,j+1] <- S0 * exp(mu * i * delta + sigma * W[i+1,j+1])
    }
  }
#-----満期におけるオプションのペイオフの計算 -----
  for (j in 0:N){
    V[N+1, j+1] <- max(S[N+1,j+1] - K, 0)
  }
#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
  for (i in N:1) {
    for (j in 1:i) {
      V[i,j] <- exp(-r * delta) * (p * V[i+1,j+1] + (1 - p) * V[i+1,j])
    }
  }
  return(V[1,1])
}

```

さて、アメリカンオプションの価格を求めるには動的計画方程式 (5.5) を解けばよいから、2 項ツリーモデルにおいても支払い関数が $f(x)$ であるアメリカンオプションの価格は

$$\begin{cases} V_{N,i} = f(S_{N,j}), j = 0, 1, \dots, N \\ V_{i,j} = \max \{ f(S_{i,j}), e^{-r\Delta t} (pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j}) \}, i \leq N, j = 0, \dots, i \end{cases}$$

を解けばよい。プログラムは以下のとおりだが、ヨーロピアンオプションのプログラムと本質的には 1 ヶ所が違っただけである。

```

CRRAcput <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  (ここの部分はヨーロピアンオプションのプログラム CRREcall と同じ)

#-----満期におけるオプションのペイオフの計算 -----
  for (j in 0:N){
    V[N+1, j+1] <- max(K - S[N+1,j+1], 0)
  }
#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
  for (i in N:1) {
    for (j in 1:i) {
      V[i,j] <- max(K - S[i,j], exp(-r * delta) * (p * V[i+1,j+1] + (1 - p) * V[i+1,j])
    }
  }
}

```

```

    return(V[1,1])
}

```

$r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $S_0 = 62, K = 60, N = 100$ のときの値

```
> CRRApout(0.1,0.2,5/12,60,62,100)
```

```
[1] 1.504253
```

```
>
```

4.7.4 モンテカルロ法によるアメリカンオプションの価格付け

モンテカルロ法によるアメリカンオプションの評価方法について述べる。とくに, Carrière (1996)^{*28}, Tsitsiklis and Van Roy (1999)^{*29}, Longstaff and Schwartz (2001)^{*30} などによる, いわゆる最小 2 乗モンテカルロ法を解説する。

これまでの議論からも分かるように, 結局のところアメリカンオプションの評価では条件付き期待値の計算が問題となる。いま $\{X(t)\}$ を (マルコフ性をもつ) 適当な確率過程としたとき, $E[f(\{X(s)\}_{t \leq s \leq T})|X(t)]$ のような条件付き期待値を計算したい。この条件付き期待値は $X(t)$ の関数となる。すなわち, 適当な関数 g を用いて

$$E[f(\{X(s)\}_{t \leq s \leq T})|X(t)] = g(X(t))$$

とかける。条件付き期待値を計算するということが関数 $g(x)$ を求めるということと同等である。 $X(t)$ の取りうる値に対する関数 g の値を計算すればよい。ツリーモデルの場合にはこれは容易だったが, 素直にモンテカルロ法を適用しようとするとき非常に面倒なことになる。そこで, Tsitsiklis and Van Roy (1999) や Longstaff and Schwartz (2001) は条件付き期待値作用素が距離射影であることを利用した数値計算方法を提案した。

一般に \mathcal{F} を適当な σ -加法族としたとき, $Y \in L^2$ の条件付き期待値 $E[Y|\mathcal{F}]$ は $E[(Y - \tilde{Y})^2]$ ($\tilde{Y} \in L^2_{\mathcal{F}}$) を最小にするような, \tilde{Y} として特徴付けられる。ここで

$$L^2 = \{X | E[X^2] < \infty\}, \quad L^2_{\mathcal{F}} = \{X \in L^2 | X \in \mathcal{F}\}$$

である。よって, 条件付き期待値作用素 $E[\cdot|\mathcal{F}]$ は Hilbert 空間 L^2 からその閉部分空間 (これも Hilbert 空間) $L^2_{\mathcal{F}}$ への射影作用素である。つまり, $E[X|\mathcal{F}]$ は X の \mathcal{F} -可測な 2 乗可積分確率変数の部分空間への射影である。 $\mathcal{F} = \sigma(X)$ のときは, $E[(Y - g(X))^2]$ を最小にする関数 g が

$$g(X) = E[Y|X]$$

となる。Hilbert 空間には基底が存在する。すなわち, $L^2_{\mathcal{F}}$ を $\{e_i\}$ を基底とすると任意の $L^2_{\mathcal{F}}$ の元 Z は, ある係数 $\{a_i\}$ を用いて

$$Z = \sum_i a_i e_i$$

^{*28} "Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression." Insurance: Mathematics and Economics 19, 19-30 (1996)

^{*29} "Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert space Theory, Approximation Algorithms, and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives", IEEE Transactions on Automatic Control, 44, 1840-1851 (1999)

^{*30} "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", Review of Financial Studies, 14, 113-147 (2001)

と書ける. そこで, $L_X^2 = \{Z \in L^2 | Z \in \sigma(X)\}$ の基底 $\{\phi_i(X)\}$ を用いて

$$E[Y|X] = \sum_i a_i \phi_i(X)$$

となる a_i を求めることを考える. これは具体的にはつぎのようにする. (X, Y) の無作為標本を $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$ とする. このとき適当な基底関数 ϕ_i ($i = 1, \dots, K$) を選んで \mathbf{Y} を $\phi_i(\mathbf{X})$ ($i = 1, \dots, K$) に最小 2 乗回帰したときの回帰係数が a_i ($i = 1, \dots, K$) となる.

4.7.5 最小 2 乗モンテカルロ法

一般論はつぎようになる. まず, モンテカルロ法により N 本のサンプルパス

$$\{S(j, t_i), i = 0, \dots, M\}_{j=1, \dots, N}$$

を発生させる. $S(j, t_i)$ はシナリオ j (j 番目のパス) の t_i における値を表す. それぞれのパスにおける最適停止時刻 $\tau^*(j)$ ($j = 1, \dots, N$) が与えられれば,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-r\tau^*(j)} f(S(j, \tau^*(j)))$$

が求めたい値となる. $\{\tau^*(j)\}_{j=1, \dots, N}$ をどのように決定するかが問題となる. 計算手続きはつぎのようになる.

$$(1) \tau_M^*(j) := T \quad (j = 1, \dots, N)$$

(2) $i = M, \dots, 1$ について, つぎの計算をする.

$$\tau_{i-1}^*(j) := \begin{cases} t_{i-1} & \text{if } f(S(j, t_{i-1})) \geq E[e^{-r(\tau_i^*(j) - t_{i-1})} f(S(\tau_i^*(j))) | S(t_{i-1}) = S(j, t_{i-1})], \\ \tau_i^*(j) & \text{if } f(S(j, t_{i-1})) < E[e^{-r(\tau_i^*(j) - t_{i-1})} f(S(\tau_i^*(j))) | S(t_{i-1}) = S(j, t_{i-1})], \end{cases} \quad (4.69)$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$(3) \tau^*(j) := \tau_0^*(j), \quad j = 1, \dots, N$$

(5.17) において $S(t_i)$ はベクトル $S(t_i) = (S(j, t_i))_{1 \leq j \leq N}$ を表す. (5.17) の条件付期待値は前項で述べた回帰分析によって計算する. すなわち, 適当な基底関数 $\{\phi_r\}_{1 \leq r \leq K}$ について

$$\min_{a_1, \dots, a_K} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{r=1}^K a_r \phi_r(S(j, t_{i-1})) - h(S(\tau_i^*(j))) \right)^2 \quad (4.70)$$

を解いて, 回帰係数 $\{a_r^*\}_{r=1, \dots, K}$ を求め

$$E[h(S(\tau_i^*(j))) | S(t_{i-1}) = S(j, t_{i-1})] = \sum_{r=1}^K a_r^* \phi_r(S(j, t_{i-1}))$$

とすればよい. 基底関数にはいくつか種類がある. もっとも単純なのは多項式関数

$$\phi_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

である。他にも, Hermite, Legendere, Chebysehv, Laguerre 多項式などがある。どの基底関数が良いのか, 基底関数を何個とるのかという問題がある。理論的結果はまだあまりない^{*31}。

Longstaff-Schwartz の論文では (5.18) の回帰をするときにすべてのパスを使うのではなく, インザマネーのパス, すなわち $h(S(j, t_{i-1})) > 0$ となるパス j のみ回帰に使うことを提唱している。 $h(S(j, t_{i-1})) \leq 0$ のときは時点 t_{i-1} において権利行使されないので, 継続価値と権利行使価値の比較には使わない。以上のアルゴリズムが機能していることは数学的に証明されている。Longstaff-Schwartz の論文の他に Clément, Lamberton, Protter(2002)^{*32}を参照せよ。

Longstaff-Schwartz の論文にある数値例を見ると最小 2 乗モンテカルロ法の仕組みがよく分かるので紹介をしておく。行使価格が $K = 1.10$ のアメリカンputオプションを考え, 行使可能な時刻を $t = 0, 1, 2, 3$ とする。金利は $r = 0.06$, 時点 $t = 0$ における株価が 1 であるとし, つぎのようなサンプルパスを 8 本を生成したとする。

パス	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	0.93	0.97	0.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	0.76	0.77	0.90
7	1.00	0.92	0.84	1.01
8	1.00	0.88	1.22	1.34

$t \leq 2$ においてオプションが行使されなかったときの, $t = 3$ におけるオプションの支払いと τ_3^* は

パス	支払い	τ_3^*
1	0	3
2	0	3
3	0.07	3
4	0.18	3
5	0	3
6	0.20	3
7	0.09	3
8	0	3

となる。

つぎに $t = 2$ における継続価値を求める。 $Y = e^{-(3-2)r}(K - S(3))^+$ ($\tau_3^* = 3$ であることに注意) と $t = 2$ における株価 $X = S(2)$ はつぎのようになる。ただし, $t = 2$ においてインザマネーのパスのみを考える。

^{*31}Glasserman and Yu, “Number of paths versus number of basis functions in American option pricing” Annals of Applied Prob. 2004, 14, 2090-2119 は参考になる。

^{*32}“An analysis of a least squares regression method for American option pricing, Finance and Stochastics, 6, 449-471

パス	Y	X
1	$0.00 \times d$	1.08
2		
3	$0.07 \times d$	1.07
4	$0.18 \times d$	0.97
5		
6	$0.20 \times d$	0.77
7	$0.90 \times d$	0.84
8		

ここで $d = e^{-0.06}$ である。基底関数を $1, x, x^2$ とし、 Y を定数と X, X^2 (X の各成分を 2 乗したベクトル) に回帰する。行列 Z を

$$Z = (\mathbf{1} \quad X \quad X^2)$$

と定義する。ここで $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 の 5 次元ベクトル。回帰係数は

$$a = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y$$

と計算できる。 Z^T は Z の転置行列。R ではつぎのようにする。

```
> d <- exp(-0.06)
> y <- c(0*d, 0.07*d, 0.18*d, 0.20*d, 0.09*d)
> x <- c(1.08, 1.07, 0.97, 0.77, 0.84)
> ones <- rep(1,5)
> z <- cbind(ones, x, x^2)
> a <- solve(t(z) %*% z) %*% t(z) %*% y
> a
      [,1]
ones -1.069983
x      2.983396
      -1.813567
```

もしくは回帰分析を行う関数 `lm()` を用いてもよい。

```
> x2 <- x^2
> lm(y ~ x + x2)
Call:
lm(formula = y ~ x + x2)

Coefficients:
(Intercept)      x      x2
      -1.070      2.983     -1.814
```

よって、回帰係数が $-1.070, 2.983, -1.813$ ということが分かり、

$$E[Y|X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$$

となる。よって、 $t=2$ における継続価値と行使した場合の支払いは

パス	行使価値	継続価値
1	0.02	0.0369
2		
3	0.03	0.0461
4	0.13	0.1176
5		
6	0.33	0.1520
7	0.26	0.1565
8		

となる。よって、パス 4, 6, 7 では $t=2$ でオプションを行使することが最適となる。よって、 τ_2^* と $e^{-(\tau_2^*-2)r}(K - S(\tau_2^*))^+$ は

パス	τ_2^*	$e^{-(\tau_2^*-2)r}(K - S(\tau_2^*))^+$
1	3	0
2	3	0
3	3	$0.07 \times d$
4	2	0.13
5	3	0
6	2	0.33
7	2	0.26
8	3	0

つぎに $t=1$ においてオプションを行使しなかった場合の継続価値を求める。 $Y = e^{-(\tau_2^*-1)r}(K - S(\tau_2^*))^+$ と $t=1$ における株価 $X = S(1)$ はつぎのようになる。ただし、 $t=1$ においてインザマネーのパスのみを考える。

パス	Y	X
1	$0.00 \times d$	1.09
2		
3		
4	$0.13 \times d$	0.93
5		
6	$0.33 \times d$	0.76
7	$0.26 \times d$	0.92
8	$0.00 \times d$	0.88

先程と同様に回帰を行うと、結局

$$E[Y|X] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$$

となる。よって、 $t = 1$ における継続価値と行使した場合の支払いは

パス	行使価値	継続価値
1	0.01	0.139
2		
3		
4	0.17	0.1092
5		
6	0.34	0.2866
7	0.18	0.1175
8	0.22	0.1533

となる。よって、パス 4, 6, 7, 8 では $t = 1$ でオプションを行使することが最適となる。よって、 τ_1^* と $t = 0$ にオプションを行使しなかった場合の $t = 1$ におけるオプションの現在価値 $e^{-(\tau_1^*-1)r}(K - S(\tau_1^*))^+$ は

パス	τ_1^*	$e^{-(\tau_1^*-1)r}(K - S(\tau_1^*))^+$
1	3	0
2	3	0
3	3	$0.07 \times d$
4	1	0.17
5	3	0
6	1	0.34
7	1	0.18
8	1	0.22

$t = 0$ においてはすべてのパスにおいてオプションを行使しないので、結局

パス	τ_0^*	$e^{-\tau_0^*r}(K - S(\tau_0^*))^+$
1	3	0
2	3	0
3	3	$0.07 \times d^2 = 0.0620$
4	1	$0.17 \times d = 0.1601$
5	3	0
6	1	$0.34 \times d = 0.3202$
7	1	$0.18 \times d = 0.2072$
8	1	$0.22 \times d = 0.1695$

よって、オプション価値は各パスのオプション価値を平均して 0.115 となる。

4.7.6 Rでの実装例

アメリカンプットオプションのRでの実装例を示す。ここでは基底として3次までのLaguerre多項式を使っている。 n 次のLaguerre多項式とは

$$L_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

のことをいう。

```

LSMAput <- function(r, sigma, T, K, S0, M, N){

  # S0 > K を仮定する
  # M : [0, T] の分割数
  # N : パスの数の半分

  Deltat <- T/M #一区間の長さ

  # 株価パスの生成
  A <- matrix(sqrt(Deltat), M, M)
  A[upper.tri(A)] <- 0
  t <- seq(1:M)/M*T
  Z <- matrix(rnorm(M*N), nrow=M, ncol=N, byrow=F)
  Z <- cbind(Z,-Z) #対称変数法を使う
  W <- A %*% Z
  S <- S0*exp((r - 0.5 * sigma^2)*t + sigma * W) #株価のパス

  Value <- pmax(0, K - S[M,]) #満期におけるオプション価値

  for (i in (M-1):1){
    Value <- exp(-r*Deltat)*Value #オプション価格を割り引く
    IntheMoney <- which(K > S[i,]) #インザマネーのパスの添字を求める
    XData <- S[i,IntheMoney] #インザマネーの株価を抽出
    XData0 <- exp(-0.5*XData) #説明変数
    XData1 <- exp(-0.5*XData)*(1-XData0)
    XData2 <- exp(-0.5*XData)*(1-2*XData0+0.5*XData^2)
    XData3 <- exp(-0.5*XData)*(1-3*XData0+1.5*XData^2-1/6*XData^3)
    YData <- Value[IntheMoney] #被説明変数

    #データフレーム型に変換
    regdata <- data.frame(XData0, XData1, XData2, XData3, YData)
    #回帰分析を実行
  }
}

```

```

a <- lm(YData ~ XData0 + XData1 + XData2 + XData3, regdata)
coef <- coef(a)

#継続価値を計算
ContinuationValue <- coef[1] + coef[2]*XData0 + coef[3]*XData1 + coef[4]*XData2
+ coef[5]*XData3
#権利行使した場合の価値 (本源的価値)
IntrinsicValue <- K - XData
#本源的価値 > 継続価値 となる添字を求める
Exercise <- which(IntrinsicValue > ContinuationValue)
#本源的価値 > 継続価値となるパスのオプション価値を更新
k <- IntheMoney[Exercise]
Value[k] <- IntrinsicValue[Exercise]
}
return(mean(exp(-r * Deltat)*Value))
}

```

たとえば2つの資産価格 S_1, S_2 に対して

$$(\max\{S_1(t), S_2(t)\} - K)^+$$

という支払いをもつアメリカンオプションに最小二乗モンテカルロ法を適用するには、基底関数としてたとえば

$$S_1, S_2, S_1^2, S_2^2, S_1 S_2$$

を用いることができる。 $S_1 S_2$ という基底を含めることが重要。

条件付き期待値の計算方法には、ほかにもマリアバン解析や Quantization method (量子化法) などによるものがある。たとえば

- Fournié, Eric, Jean-Michel Lasry, Jérôme Lebuchoux, and Pierre-Louis Lions. “Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance. II.” *Finance and Stochastics* 5, no. 2 (April 2001): 201 – 236. .
- B. Bouchard, I. Ekeland, N. Touzi “On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations”(2004) 8, *Finance and Stochastics*, 45-71
- V. Bally, L. Caramellino, A. Zantedighi, “Pricing and hedging american options by Monte Carlo using a Malliavin calculus approach”(2005) 11, *Monte Carlo Methods and Applications*, 97-133
- Bally, Vlad, Gilles Pages, and Jacques Printems. “A Quantization Tree Method for Pricing and Hedging Multidimensional American Options.” *Mathematical Finance* 15, no. 1 (January 2005): 119 – 168.

を参照せよ。

5 アメリカンオプションの価格付け

5.1 アメリカンオプション

あらかじめ決められた時点 T でのみ行使ができるオプションをヨーロピアンオプションと呼んだ。一方、オプションの買い手が行使時点を自分で選べるオプションを**アメリカンオプション**とよぶ。行使時点は停止時刻とよばれる概念で定義する。任意の $t > 0$ に対して、確率変数 τ に関する事象

$$\{\tau < t\}$$

が成り立っているかどうかを t 時点までの情報で判断できるとき、 τ を**停止時刻**とよぶ。直感的には、停止時刻 τ は繰り返し行われる賭けを止める規則のようなものである。ただし、賭けを止めるかどうかは現時点までの情報（現時点までの賭けの結果）によって決めなければならない。ある時点までの賭けの結果はランダムなので停止時刻もランダムである。

いま t 時点におけるオプションの支払いを $f(S(t))$ とし、停止時刻 τ^* を所与とする。するとオプションの支払いは $f(S(\tau^*))$ となり、 $f(S(\tau^*))$ は満期時点までの情報で支払い額が確定するので、マルチンゲールアプローチによればその価格は

$$E \left[e^{-r\tau^*} f(S(\tau^*)) \right]$$

となる。実際には τ^* は所与ではなく、オプションの買い手は自分にとって最も有利な τ^* を選ぶだろうから、オプションの価格は

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E \left[e^{-r\tau} f(S(\tau)) \right] \quad (5.1)$$

としなければならない。ここで $\mathcal{T}_{0,T}$ は $[0, T]$ に値をとる停止時刻の集合を表す。(5.1)の問題を最適停止問題といい、その解を最適停止時刻とよぶ。最適停止時刻はつぎのように特徴づけられる。まず

$$V(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} E[e^{-r(\tau-t)} f(S(\tau)) | S(t) = x] \quad (5.2)$$

とする。ここで $V(t, S(t)) \geq f(S(t))$ であることに注意する。すると最適停止時刻 τ^* は

$$\tau^* = \inf \{ t \in [0, T] : V(t, S(t)) \leq f(S(t)) \}$$

によって与えられ、さらに

$$V_0 = \phi(0)S(0) + \eta(0)B(0) \text{ かつ } \phi(t)S(t) + \eta(t)B(t) \geq f(t, S(t))$$

となる（優）複製ポートフォリオ (ϕ, η) が存在する。合理的な投資家は

$$V(t, S(t)) > f(S(t))$$

のときにはオプションを行使せず、 $V(t, S(t)) = f(S(t))$ となる t でオプションを行使することになる。集合

$$C = \{(t, x) : V(t, x) > f(x)\}$$

を**継続領域**とよぶことがある。

また (5.2) はつぎの変分不等式を満たすことが知られている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + rs \frac{\partial V}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) - rV(t, x) &\leq 0, \quad V(t, x) \geq f(x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, \infty) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + rs \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) - rV(t, x) \right) (V(t, x) - f(x)) &= 0, \quad (t, s) \in [0, T] \times [0, \infty) \\ V(T, x) &= f(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

じつは一般にはアメリカンオプションの価格 (1.42) の解析的な表現は見つかっていない。一番単純だと思われる Black-Scholes モデルにおけるアメリカンプットオプションにさえ解析的な解は見つかっていない*33。よって、アメリカンオプションの価格を求めるには何らかの数值計算が必ず必要になる。

5.2 動的計画法によるアメリカンオプションの価格付け

動的計画法を用いたアメリカンオプションの価格付けを紹介する。\$\{S(t)\}_{0 \leq t \leq T}\$ を (マルコフ性をもつ) 確率過程とし、オプションの支払い関数を \$f(x)\$ とすると、アメリカンオプションの価格 \$V_0\$ は

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E[e^{-r\tau} f(S(\tau))]$$

で与えられた。\$\mathcal{T}_{0,T}\$ は \$[0, T]\$ に値をとる停止時刻の集合である。アメリカンオプションは期間 \$[0, T]\$ における任意の時刻に権利行使できるが、ここでは \$[0, T]\$ における時刻

$$0(=t_0) < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$$

においてのみ権利行使できるオプションを考える。これをバミューダオプション (Bermudan option) と呼ぶことがある。簡単のため

$$t_{i+1} - t_i = \frac{T}{M} \quad (:= \Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, M$$

と仮定する。\$M\$ を十分大きくとればバミューダオプションの価格はアメリカンオプションの価格に近づくから、バミューダオプションをアメリカンオプションの近似と考えてもよいし、はじめからバミューダオプションの価格付けをすると考えてもよい。この場合

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,M}} E[e^{-r\tau} f(S(\tau))] \quad (5.4)$$

を解くことになる。\$\mathcal{T}_{0,M}\$ は \$t_0, \dots, t_M\$ に値をとる停止時刻の集合である。\$V_0\$ はつぎの動的計画方程式を後ろ向きに解くことによって得られる。

$$\begin{cases} V_M := f(S(T)) \\ V_{i-1} := \max\{f(S(t_{i-1})), E[e^{-r\Delta t} V_i | S(t_{i-1})]\}, \quad 1 \leq i \leq M. \end{cases} \quad (5.5)$$

ここで \$V_i\$ は \$t_i\$ 時点までにオプションが行使されないと仮定したときの、\$t_i\$ 時点におけるオプションの価値を表す。また \$\tau^*\$ は

$$\tau^* = \min\{t_i, 0 \leq i \leq M \mid f(S(t_i)) \geq V_i\}$$

*33 アメリカンコールオプションは満期時点で行使することが最適であることが知られている。すなわち、アメリカンコールオプションの価格はヨーロピアンコールオプションの価格に等しい。ただし配当がない場合に限る。

によって求まる。

動的計画方程式 (5.5) を停止時刻を主役書き換えるとつぎのようになる。まず τ_i^* ($0 \leq i \leq M$) を

$$\tau_i^* = \min\{t_k, i \leq k \leq M \mid h(S(t_k)) \geq V_i\}$$

と定義すると、 τ_0^* が求めたい最適停止時刻 τ^* である。 τ_i^* はつぎのように求まる。

$$\begin{cases} \tau_M^* := T \\ \tau_{i-1}^* := t_{i-1} 1_{A_{i-1}} + \tau_i^* 1_{A_{i-1}^c}, 1 \leq i \leq M. \end{cases} \quad (5.6)$$

ここで

$$A_{i-1} = \left\{ h(S(t_{i-1})) > E \left[e^{-r(\tau_i^* - t_{i-1})} h(S(\tau_i^*)) \mid S(t_{i-1}) \right] \right\}$$

であり、 A_{i-1}^c は A_{i-1} の補集合を表す。

5.3 2項モデルによるアメリカンオプションの価格付け

モンテカルロ法による価格付けを見る前に、2項モデル^{*34}における価格付けを見ておこう。(リスク中立確率のもとでの) Black-Scholes モデル

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), S(0) = s_0 > 0 \quad (5.7)$$

を原資産とするアメリカンオプションを考える。確率微分方程式 (5.7) の解が

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (5.8)$$

であることを利用して、原資産価格のツリーを構成してみよう。(5.8)において不確実性をもつのはブラウン運動 $\{W(t)\}$ の部分だけである。よって、ブラウン運動 $\{W(t)\}$ を近似する図 5.1 のようなツリー $\{W_{i,j}\}$ を構成すれば、そこから $\{S(t)\}$ を近似するツリー $\{S_{i,j}\}$ を構成することができる。ブラウン運動 $\{W(t)\}$ を近似する2項ツリー $\{W_{i,j}\}_{i=0,\dots,N,j=0,\dots,i}$ を構成しよう。時間空間 $[0, T]$ を N 等分し、 $\Delta t = T/N$, $t_i = i\Delta t$ ($i = 0, 1, \dots, N$) とおく。 $W_{i,j}$ は時刻 t_i において、ブラウン運動が j 回上昇した節点 (ノード) を表す (これを (i, j) ノードとよぶ)。また、 $W_{i,j} = w$ のとき、 $W_{i+1,j+1} = w + u$, $W_{i+1,j} = w + d$ とし ($d < 0$)、 $W_{i,j}$ から $W_{i+1,j+1}$, $W_{i+1,j}$ に推移する確率をそれぞれ、 p , $1-p$ とおく (図 5.2)。すなわち、ブラウン運動のツリーでは p の確率で u だけ上昇し、 $1-p$ の確率で d だけ上昇 ($-d$ だけ下降) する。以上の設定のもとで、ブラウン運動の振る舞いに整合するように、パラメータ u, d, p を決定する。

ベクトル W_i を $W_{i,1}, W_{i,2}, \dots, W_{i,i}$ のいずれかの値をとる確率変数とする。2項モデルにおいて、時刻 t_i で W_i の値が w であるという条件のもとでの W_{i+1} の期待値は

$$E[W_{i+1} \mid W_i = w] = p(w + u) + (1-p)(w + d) = w + pu + (1-p)d \quad (5.9)$$

となる。一方、 $W(t_i) = w$ という条件のもとでのブラウン運動 $W(t_i + \Delta t)$ の期待値は

$$\begin{aligned} E[W(t_i + \Delta t) \mid W(t_i) = w] &= E[W(t_i + \Delta t) - W(t_i) + W(t_i) \mid W(t_i) = w] \\ &= w + E[W(t_i + \Delta t) - W(t_i)] \\ &= w \end{aligned} \quad (5.10)$$

^{*34}Cox, Ross, and Rubinstein ("Option Pricing: A Simplified Approach", J.Financial Economics, 7(1979) 229-263) が最初に提案した方法と言われている。CRR モデルとも言う。

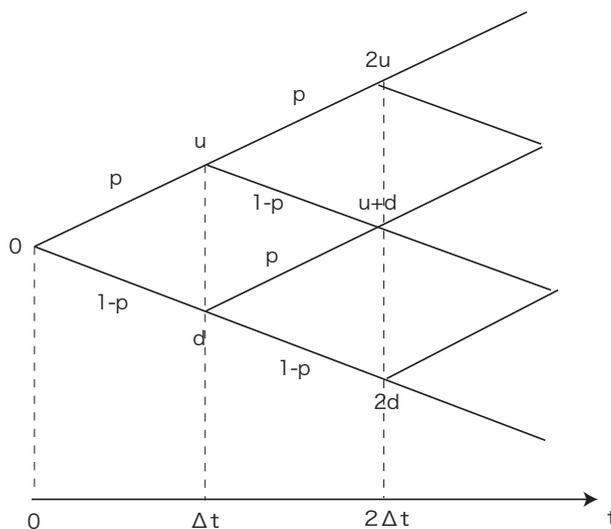


図 5.1 ブラウン運動の 2 項モデル

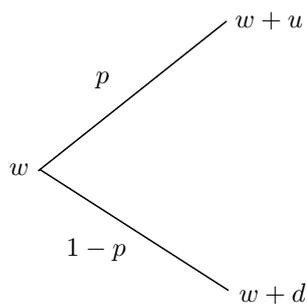


図 5.2

となる。(5.9) と (5.10) より

$$w + pu + (1 - p)d = w \Leftrightarrow pu + (1 - p)d = 0 \quad (5.11)$$

となる。つぎに分散を合わせる。2 項モデルの条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[W_{i+1}|W_i = w] &= p(w + u)^2 + (1 - p)(w + d)^2 - (p(w + u) + (1 - p)(w + d))^2 \\ &= p(w + u)^2 + (1 - p)(w + d)^2 - w^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

となる。一方、ブラウン運動の条件付き分散は

$$\begin{aligned} V[W(t_i + \Delta t)|W(t_i) = w] &= V[W(t_i + \Delta t) - W(t_i) + W(t_i)|W(t_i) = w] \\ &= V[W(t_i + \Delta t) - W(t_i)] \\ &= \Delta t \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる。(5.12) と (5.13) より

$$p(w + u)^2 + (1 - p)(w + d)^2 - w^2 = \Delta t \quad (5.14)$$

となる。(5.11)と(5.14)をみたす u, d, p を決めればよいが、自由度が1つある。ここでは、 $d = -u$ と設定してみよう。すると、(5.11)と(5.14)は

$$pu + (1-p)(-u) = 0, \quad p(w+u)^2 + (1-p)(w-u)^2 - w^2 = \Delta t$$

となる。これを解くと

$$p = \frac{1}{2}, \quad u = \sqrt{\Delta t}, \quad d = -\sqrt{\Delta t}$$

が得られる。これらのパラメータをもとにブラウン運動を近似するツリー $\{W_{i,j}\}$ をつくり、それに応じて株価のツリーを

$$S_{i,j} = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i + \sigma W_{i,j} \right\}$$

によってつくればよい。

これらをもとに、たとえばヨーロッパコールオプションの価格を求めるには以下のようにする。ヨーロッパンオプションの場合、満期 T における支払いを無リスク金利で現在に割り引いたもの(リスク中立確率のもとでの)期待値を取ればよかった。 (i, j) ノードにおけるオプションの価格を $V_{i,j}$ とおく。設定によりノード (i, j) における原資産価格は $S_{i,j} = S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t_i + \sigma W_{i,j}\}$ である。すると、満期における支払いは

$$V_{N,j} = (S_{N,j} - K)^+, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (5.15)$$

となる。よって、オプションの価格は

$$\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} e^{-rT} (S_{N,j} - K)^+ \quad (5.16)$$

によって求めることができる。または、(5.15)から始めて、 $i \leq N-1$ 時点におけるオプションの価格を

$$V_{i,j} = e^{-r\Delta t} (pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j}), \quad i = N-1, N-2, \dots, 0, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

と後ろ向きにつきつぎと計算していくと $V_{0,0}$ が求めたいオプション価格になる^{*35}。

プログラムを書くときつぎのようになる。

```
CRREcall <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  W <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #ブラウン運動行列の初期化
  S <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #株価行列の初期化
  V <- matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1) #オプション価格行列の初期化
  delta <- T/N #時間間隔
  u <- sqrt(delta) #上昇の大きさ
  d <- -sqrt(delta) #下降の大きさ
  p <- 0.5 #リスク中立確率
#----- 株価ツリーの構築 -----
  mu <- r - 0.5 * sigma^2
  for (i in 0:N){
```

^{*35}Rで実装する場合、添字が1から始まることに注意。

```

    for (j in 0:i){
      W[i+1,j+1] <- j * u + (i - j) * d
      S[i+1,j+1] <- S0 * exp(mu * i * delta + sigma * W[i+1,j+1])
    }
  }
#-----満期におけるオプションのペイオフの計算 -----
  for (j in 0:N){
    V[N+1, j+1] <- max(S[N+1,j+1] - K, 0)
  }
#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
  for (i in N:1) {
    for (j in 1:i) {
      V[i,j] <- exp(-r * delta) * (p * V[i+1,j+1] + (1 - p) * V[i+1,j])
    }
  }
  return(V[1,1])
}

```

さて、アメリカンオプションの価格を求めるには動的計画方程式 (5.5) を解けばよいから、2 項ツリーモデルにおいても支払い関数が $f(x)$ であるアメリカンオプションの価格は

$$\begin{cases} V_{N,i} = f(S_{N,j}), j = 0, 1, \dots, N \\ V_{i,j} = \max \{ f(S_{i,j}), e^{-r\Delta t} (pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j}) \}, i \leq N, j = 0, \dots, i \end{cases}$$

を解けばよい。プログラムは以下のとおりだが、ヨーロピアンオプションのプログラムと本質的には 1 ヶ所が違っただけである。

```

CRRAcput <- function(r, sigma, T, K, S0, N)
{
  (ここの部分はヨーロピアンオプションのプログラム CRREcall と同じ)

#-----満期におけるオプションのペイオフの計算 -----
  for (j in 0:N){
    V[N+1, j+1] <- max(K - S[N+1,j+1], 0)
  }
#----- 後ろ向きにオプション価格を計算 -----
  for (i in N:1) {
    for (j in 1:i) {
      V[i,j] <- max(K - S[i,j], exp(-r * delta) * (p * V[i+1,j+1] + (1 - p) * V[i+1,j])
    }
  }
}

```

```

    return(V[1,1])
}

```

$r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 5$ ヶ月, $S_0 = 62, K = 60, N = 100$ のときの値

```
> CRRApout(0.1,0.2,5/12,60,62,100)
```

```
[1] 1.504253
```

```
>
```

5.4 モンテカルロ法によるアメリカンオプションの価格付け

モンテカルロ法によるアメリカンオプションの評価方法について述べる。とくに, Carrière (1996)^{*36}, Tsitsiklis and Van Roy (1999)^{*37}, Longstaff and Schwartz (2001)^{*38} などによる, いわゆる最小 2 乗モンテカルロ法を解説する。

5.4.1 条件付き期待値

これまでの議論からも分かるように, 結局のところアメリカンオプションの評価では条件付き期待値の計算が問題となる。いま $\{X(t)\}$ を (マルコフ性をもつ) 適当な確率過程としたとき, $E[f(\{X(s)\}_{t \leq s \leq T})|X(t)]$ のような条件付き期待値を計算したい。この条件付き期待値は $X(t)$ の関数となる。すなわち, 適当な関数 g を用いて

$$E[f(\{X(s)\}_{t \leq s \leq T})|X(t)] = g(X(t))$$

とかける。条件付き期待値を計算するということは関数 $g(x)$ を求めるということと同等である。 $X(t)$ の取りうる値に対する関数 g の値を計算すればよい。ツリーモデルの場合にはこれは容易だったが, 素直にモンテカルロ法を適用しようとするとは非常に面倒なことになる。そこで, Tsitsiklis and Van Roy (1999) や Longstaff and Schwartz (2001) は条件付き期待値作用素が距離射影であることを利用した数値計算方法を提案した。

一般に \mathcal{F} を適当な σ -加法族としたとき, $Y \in L^2$ の条件付き期待値 $E[Y|\mathcal{F}]$ は $E[(Y - \tilde{Y})^2]$ ($\tilde{Y} \in L^2_{\mathcal{F}}$) を最小にするような, \tilde{Y} として特徴付けられる。ここで

$$L^2 = \{X | E[X^2] < \infty\}, \quad L^2_{\mathcal{F}} = \{X \in L^2 | X \in \mathcal{F}\}$$

である。よって, 条件付き期待値作用素 $E[\cdot|\mathcal{F}]$ は Hilbert 空間 L^2 からその閉部分空間 (これも Hilbert 空間) $L^2_{\mathcal{F}}$ への射影作用素である。つまり, $E[X|\mathcal{F}]$ は X の \mathcal{F} -可測な 2 乗可積分確率変数の部分空間への射影である。 $\mathcal{F} = \sigma(X)$ のときは, $E[(Y - g(X))^2]$ を最小にする関数 g が

$$g(X) = E[Y|X]$$

となる。Hilbert 空間には基底が存在する。すなわち, $L^2_{\mathcal{F}}$ を $\{e_i\}$ を基底とすると任意の $L^2_{\mathcal{F}}$ の元 Z は, ある

^{*36} "Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression." Insurance: Mathematics and Economics 19, 19-30 (1996)

^{*37} "Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert space Theory, Approximation Algorithms, and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives", IEEE Transactions on Automatic Control, 44, 1840-1851 (1999)

^{*38} "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", Review of Financial Studies, 14, 113-147 (2001)

係数 $\{a_i\}$ を用いて

$$Z = \sum_i a_i e_i$$

と書ける. そこで, $L_X^2 = \{Z \in L^2 | Z \in \sigma(X)\}$ の基底 $\{\phi_i(X)\}$ を用いて

$$E[Y|X] = \sum_i a_i \phi_i(X)$$

となる a_i を求めることを考える. これは具体的にはつぎのようにする. (X, Y) の無作為標本を $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$ とする. このとき適当な基底関数 ϕ_i ($i = 1, \dots, K$) を選んで \mathbf{Y} を $\phi_i(\mathbf{X})$ ($i = 1, \dots, K$) に最小 2 乗回帰したときの回帰係数が a_i ($i = 1, \dots, K$) となる.

5.4.2 最小 2 乗モンテカルロ法

一般論はつぎのようになる. まず, モンテカルロ法により N 本のサンプルパス

$$\{S(j, t_i), i = 0, \dots, M\}_{j=1, \dots, N}$$

を発生させる. $S(j, t_i)$ はシナリオ j (j 番目のパス) の t_i における値を表す. それぞれのパスにおける最適停止時刻 $\tau^*(j)$ ($j = 1, \dots, N$) が与えられれば,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-r\tau^*(j)} f(S(j, \tau^*(j)))$$

が求めたい値となる. $\{\tau^*(j)\}_{j=1, \dots, N}$ をどのように決定するかが問題となる. 計算手続きはつぎのようになる.

$$(1) \tau_M^*(j) := T \quad (j = 1, \dots, N)$$

(2) $i = M, \dots, 1$ について, つぎの計算をする.

$$\tau_{i-1}^*(j) := \begin{cases} t_{i-1} & \text{if } f(S(j, t_{i-1})) \geq E[e^{-r(\tau_i^*(j) - t_{i-1})} f(S(\tau_i^*(j))) | S(t_{i-1}) = S(j, t_{i-1})], \\ \tau_i^*(j) & \text{if } f(S(j, t_{i-1})) < E[e^{-r(\tau_i^*(j) - t_{i-1})} f(S(\tau_i^*(j))) | S(t_{i-1}) = S(j, t_{i-1})], \end{cases} \quad (5.17)$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$(3) \tau^*(j) := \tau_0^*(j), \quad j = 1, \dots, N$$

(5.17) において $S(t_i)$ はベクトル $S(t_i) = (S(j, t_i))_{1 \leq j \leq N}$ を表す. (5.17) の条件付期待値は前項で述べた回帰分析によって計算する. すなわち, 適当な基底関数 $\{\phi_r\}_{1 \leq r \leq K}$ について

$$\min_{a_1, \dots, a_K} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{r=1}^K a_r \phi_r(S(j, t_{i-1})) - h(S(\tau_i^*(j))) \right)^2 \quad (5.18)$$

を解いて, 回帰係数 $\{a_r^*\}_{r=1, \dots, K}$ を求め

$$E[h(S(\tau_i^*(j))) | S(t_{i-1}) = S(j, t_{i-1})] = \sum_{r=1}^K a_r^* \phi_r(S(j, t_{i-1}))$$

とすればよい. 基底関数にはいくつか種類がある. もっとも単純なのは多項式関数

$$\phi_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

である。他にも, Hermite, Legendere, Chebysehv, Laguerre 多項式などがある。どの基底関数が良いのか, 基底関数を何個とるのかという問題がある。理論的結果はまだあまりない*39。

Longstaff-Schwartz の論文では (5.18) の回帰をするときにすべてのパスを使うのではなく, インザマネーのパス, すなわち $h(S(j, t_{i-1})) > 0$ となるパス j のみ回帰に使うことを提唱している。 $h(S(j, t_{i-1})) \leq 0$ のときは時点 t_{i-1} において権利行使されないので, 継続価値と権利行使価値の比較には使わない。以上のアルゴリズムが機能していることは数学的に証明されている。Longstaff-Schwartz の論文の他に Clément, Lamberton, Protter(2002)*40を参照せよ。

Longstaff-Schwartz の論文にある数値例を見ると最小 2 乗モンテカルロ法の仕組みがよく分かるので紹介をしておく。行使価格が $K = 1.10$ のアメリカンプットオプションを考え, 行使可能な時刻を $t = 0, 1, 2, 3$ とする。金利は $r = 0.06$, 時点 $t = 0$ における株価が 1 であるとし, つぎのようなサンプルパスを 8 本を生成したとする。

パス	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	0.93	0.97	0.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	0.76	0.77	0.90
7	1.00	0.92	0.84	1.01
8	1.00	0.88	1.22	1.34

$t \leq 2$ においてオプションが行使されなかったときの, $t = 3$ におけるオプションの支払いと τ_3^* は

パス	支払い	τ_3^*
1	0	3
2	0	3
3	0.07	3
4	0.18	3
5	0	3
6	0.20	3
7	0.09	3
8	0	3

となる。

つぎに $t = 2$ における継続価値を求める。 $Y = e^{-(3-2)r}(K - S(3))^+$ ($\tau_3^* = 3$ であることに注意) と $t = 2$ における株価 $X = S(2)$ はつぎのようになる。ただし, $t = 2$ においてインザマネーのパスのみを考える。

*39 Glasserman and Yu, "Number of paths versus number of basis functions in American option pricing" Annals of Applied Prob. 2004, 14, 2090-2119 は参考になる。

*40 "An analysis of a least squares regression method for American option pricing, Finance and Stochastics, 6, 449-471

パス	Y	X
1	$0.00 \times d$	1.08
2		
3	$0.07 \times d$	1.07
4	$0.18 \times d$	0.97
5		
6	$0.20 \times d$	0.77
7	$0.90 \times d$	0.84
8		

ここで $d = e^{-0.06}$ である。基底関数を $1, x, x^2$ とし、 Y を定数と X, X^2 (X の各成分を 2 乗したベクトル) に回帰する。行列 Z を

$$Z = (\mathbf{1} \quad X \quad X^2)$$

と定義する。ここで $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 の 5 次元ベクトル。回帰係数は

$$a = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y$$

と計算できる。 Z^T は Z の転置行列。R ではつぎのようにする。

```
> d <- exp(-0.06)
> y <- c(0*d, 0.07*d, 0.18*d, 0.20*d, 0.09*d)
> x <- c(1.08, 1.07, 0.97, 0.77, 0.84)
> ones <- rep(1,5)
> z <- cbind(ones, x, x^2)
> a <- solve(t(z) %*% z) %*% t(z) %*% y
> a
      [,1]
ones -1.069983
x      2.983396
      -1.813567
```

もしくは回帰分析を行う関数 `lm()` を用いてもよい。

```
> x2 <- x^2
> lm(y ~ x + x2)
Call:
lm(formula = y ~ x + x2)

Coefficients:
(Intercept)      x      x2
    -1.070     2.983    -1.814
```

よって、回帰係数が $-1.070, 2.983, -1.813$ ということが分かり、

$$E[Y|X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$$

となる。よって、 $t=2$ における継続価値と行使した場合の支払いは

パス	行使価値	継続価値
1	0.02	0.0369
2		
3	0.03	0.0461
4	0.13	0.1176
5		
6	0.33	0.1520
7	0.26	0.1565
8		

となる。よって、パス 4, 6, 7 では $t=2$ でオプションを行使することが最適となる。よって、 τ_2^* と $e^{-(\tau_2^*-2)r}(K - S(\tau_2^*))^+$ は

パス	τ_2^*	$e^{-(\tau_2^*-2)r}(K - S(\tau_2^*))^+$
1	3	0
2	3	0
3	3	$0.07 \times d$
4	2	0.13
5	3	0
6	2	0.33
7	2	0.26
8	3	0

つぎに $t=1$ においてオプションを行使しなかった場合の継続価値を求める。 $Y = e^{-(\tau_2^*-1)r}(K - S(\tau_2^*))^+$ と $t=1$ における株価 $X = S(1)$ はつぎのようになる。ただし、 $t=1$ においてインザマネーのパスのみを考える。

パス	Y	X
1	$0.00 \times d$	1.09
2		
3		
4	$0.13 \times d$	0.93
5		
6	$0.33 \times d$	0.76
7	$0.26 \times d$	0.92
8	$0.00 \times d$	0.88

先程と同様に回帰を行うと、結局

$$E[Y|X] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$$

となる。よって、 $t=1$ における継続価値と行使した場合の支払いは

パス	行使価値	継続価値
1	0.01	0.139
2		
3		
4	0.17	0.1092
5		
6	0.34	0.2866
7	0.18	0.1175
8	0.22	0.1533

となる。よって、パス 4, 6, 7, 8 では $t=1$ でオプションを行使することが最適となる。よって、 τ_1^* と $t=0$ にオプションを行使しなかった場合の $t=1$ におけるオプションの現在価値 $e^{-(\tau_1^*-1)r}(K - S(\tau_1^*))^+$ は

パス	τ_1^*	$e^{-(\tau_1^*-1)r}(K - S(\tau_1^*))^+$
1	3	0
2	3	0
3	3	$0.07 \times d$
4	1	0.17
5	3	0
6	1	0.34
7	1	0.18
8	1	0.22

$t=0$ においてはすべてのパスにおいてオプションを行使しないので、結局

パス	τ_0^*	$e^{-\tau_0^*r}(K - S(\tau_0^*))^+$
1	3	0
2	3	0
3	3	$0.07 \times d^2 = 0.0620$
4	1	$0.17 \times d = 0.1601$
5	3	0
6	1	$0.34 \times d = 0.3202$
7	1	$0.18 \times d = 0.2072$
8	1	$0.22 \times d = 0.1695$

よって、オプション価値は各パスのオプション価値を平均して 0.115 となる。

5.4.3 Rでの実装例

アメリカンプットオプションのRでの実装例を示す。ここでは基底として3次までのLaguerre多項式を使っている。 n 次のLaguerre多項式とは

$$L_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

のことをいう。

```

LSMAput <- function(r, sigma, T, K, S0, M, N){

  # S0 > K を仮定する
  # M : [0, T] の分割数
  # N : パスの数の半分

  Deltat <- T/M #一区間の長さ

  # 株価パスの生成
  A <- matrix(sqrt(Deltat), M, M)
  A[upper.tri(A)] <- 0
  t <- seq(1:M)/M*T
  Z <- matrix(rnorm(M*N), nrow=M, ncol=N, byrow=F)
  Z <- cbind(Z,-Z) #対称変数法を使う
  W <- A %*% Z
  S <- S0*exp((r - 0.5 * sigma^2)*t + sigma * W) #株価のパス

  Value <- pmax(0, K - S[M,]) #満期におけるオプション価値

  for (i in (M-1):1){
    Value <- exp(-r*Deltat)*Value #オプション価格を割り引く
    IntheMoney <- which(K > S[i,]) #インザマネーのパスの添字を求める
    XData <- S[i,IntheMoney] #インザマネーの株価を抽出
    XData0 <- exp(-0.5*XData) #説明変数
    XData1 <- exp(-0.5*XData)*(1-XData0)
    XData2 <- exp(-0.5*XData)*(1-2*XData+0.5*XData^2)
    XData3 <- exp(-0.5*XData)*(1-3*XData+1.5*XData^2-1/6*XData^3)
    YData <- Value[IntheMoney] #被説明変数

    #データフレーム型に変換
    regdata <- data.frame(XData0, XData1, XData2, XData3, YData)
    #回帰分析を実行
  }
}

```

```

a <- lm(YData ~ XData0 + XData1 + XData2 + XData3, regdata)
coef <- coef(a)

#継続価値を計算
ContinuationValue <- coef[1] + coef[2]*XData0 + coef[3]*XData1 + coef[4]*XData2
+ coef[5]*XData3
#権利行使した場合の価値 (本源的価値)
IntrinsicValue <- K - XData
#本源的価値 > 継続価値 となる添字を求める
Exercise <- which(IntrinsicValue > ContinuationValue)
#本源的価値 > 継続価値となるパスのオプション価値を更新
k <- IntheMoney[Exercise]
Value[k] <- IntrinsicValue[Exercise]
}
return(mean(exp(-r * Deltat)*Value))
}

```

たとえば2つの資産価格 S_1, S_2 に対して

$$(\max\{S_1(t), S_2(t)\} - K)^+$$

という支払いをもつアメリカンオプションに最小二乗モンテカルロ法を適用するには、基底関数としてたとえば

$$S_1, S_2, S_1^2, S_2^2, S_1 S_2$$

を用いることができる。 $S_1 S_2$ という基底を含めることが重要。

条件付き期待値の計算方法には、ほかにもマリアバン解析や Quantization method (量子化法) などによるものがある。たとえば

- Fournié, Eric, Jean-Michel Lasry, Jérôme Lebuchoux, and Pierre-Louis Lions. “Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance. II.” *Finance and Stochastics* 5, no. 2 (April 2001): 201 – 236. .
- B. Bouchard, I. Ekeland, N. Touzi “On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations”(2004) 8, *Finance and Stochastics*, 45-71
- V. Bally, L. Caramellino, A. Zantedeschi, “Pricing and hedging american options by Monte Carlo using a Malliavin calculus approach”(2005) 11, *Monte Carlo Methods and Applications*, 97-133
- Bally, Vlad, Gilles Pages, and Jacques Printems. “A Quantization Tree Method for Pricing and Hedging Multidimensional American Options.” *Mathematical Finance* 15, no. 1 (January 2005): 119 – 168.

を参照せよ。

6 パラメータ推定と Black-Scholes モデル

1次元の斉時的 (time-homogeneous) な確率微分方程式

$$dX(t) = b(X(t), \theta)dt + \sigma(X(t), \theta)dW(t) \quad (6.1)$$

を考える。ここで $\theta \in \mathbb{R}^p$ はパラメータベクトルである。確率過程 X が斉時的であるとは $X(s)$ の値が与えられたもとでの $X(t+s)$ の分布が s に依存しないことをいう。このときパラメータ θ の推定方法について考える。

6.1 最尤法

X の時系列データからパラメータ $\theta \in \mathbb{R}^p$ を推定することを考える。すなわち、離散時点 t_0, t_1, \dots, t_n において (6.1) の標本 (データ) $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ が観測されるとする。このとき、これらの実現値から θ を推定する。以下では簡単のため $t_i = i\Delta$, $i = 0, \dots, n$ ($\Delta > 0$ は定数) と仮定する。すなわち標本は等間隔で観測されると仮定する。また $X(t_i) = X_i$ と略記する。

X_0, \dots, X_n の同時密度関数を $f(x_0, \dots, x_n; \theta)$ とおく。また、 $X(s) = x$ という条件のもとでの $X(s+t)$ の条件付き密度関数を $f(t, \cdot | x; \theta)$ とおく。 X が斉時的なため条件付き密度が s に依存しないことに注意せよ。このとき X のマルコフ性から

$$\begin{aligned} f(X_0, \dots, X_n; \theta) &= f(\Delta, X_n | X_{n-1}; \theta) f(\Delta, X_{n-1} | X_{n-2}; \theta) \dots f(\Delta, X_1 | X_0; \theta) f(X_0; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(\Delta, X_i | X_{i-1}; \theta) f(X_0; \theta) \end{aligned}$$

となる。ここで $f(X_0; \theta)$ は X_0 の密度関数である。この同時密度関数 $f(X_0, \dots, X_n; \theta)$ をパラメータ θ の関数とみると、これを **尤度関数** とよぶ。最尤法とは尤度関数を最大にするような θ を推定値とする方法である。尤度関数を $L(\theta)$ と書くことにする。通常は対数尤度 $l(\theta) = \log L(\theta)$ を最大化する。対数尤度は

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(\Delta, X_i | X_{i-1}; \theta) + \log f(X_0; \theta) \quad (6.2)$$

である。 X_0 の密度関数 f は未知のことが多く、また分かっているとしてもそれを考慮すると計算が煩雑になることが多い。そこで $f(X_0; \theta) = 1$ と仮定してしまうことが多い。 n が十分大きければその影響は無視できる。

例題 6.1 (Black-Scholes モデル (対数正規過程)) Black-Scholes モデル

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

のパラメータ $\theta = (\mu, \sigma)$ の推定を考える。条件付き分布は対数正規分布であり、その条件付き密度は

$$f(\Delta, y | x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\sigma^2 y}} \exp \left\{ -\frac{(\log y - (\log x + (\mu - \sigma^2/2)\Delta))^2}{2\sigma^2\Delta} \right\}$$

で与えられる。これを (6.2) に代入して対数尤度関数を作ればよい。2009/1/5–2013/1/8 の日経平均株価の日次データ^{*41} を使って、 μ, σ を推定してみる。R で推定するとつぎのようになる。stats4 パッケージにある mle 関数を使う。まず尤度関数を作っておく。

```
dcBS <- function(x, t, x0, theta){
  ml <- log(x0) + (theta[1] - theta[2]^2/2) * t
  sl <- sqrt(t) * theta[2]
  lik <- dlnorm(x, meanlog=ml, sdlog=sl, log=TRUE)
  return(lik)
}
BS.lik <- function(mu, sigma){
  n <- length(X)
  dt <- deltat(X)
  return(-sum(dcBS(x=X[2:n], t=dt, x0=X[1:(n-1)], theta=c(mu,sigma))))
}
```

dlnorm は対数正規分布関数の密度関数。log = TRUE というオプションにより log(密度関数) の値を返す。BS.lik は尤度関数にマイナスをつけたものである。マイナスをつけるのは mle 関数の仕様に合わせるためである。これを準備した上でつぎのようにする (細かい点は授業で話します)。

```
> library(stats4)
> data <- read.csv("nikkei.csv")
> X <- ts(data$nikkei, frequency=250)
> result <- mle(BS.lik, start=list(mu=1, sigma=1), method="L-BFGS-B", lower=c(-0.1, 0.001))
> summary(result)
```

Maximum likelihood estimation

Call:

```
mle(minuslogl = BS.lik, start = list(mu = 1, sigma = 1), method = "L-BFGS-B",
    lower = c(-0.1, 0.001))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error
mu	0.06347855	0.113394175
sigma	0.22484100	0.005070552

-2 log L: 12422.04

よって、 $\mu = 0.0635$, $\sigma = 0.225$ となる。 μ の推定誤差が非常に大きいことに注意。この点については後述する。

^{*41}R での株価の取得には RFinanceYJ というパッケージが便利。

実際には $X(t+s) = \log(S(t+s)/S(s))$ が独立な正規分布に従うことを使ったほうが簡単だろう。

$$\log\left(\frac{S(t+\Delta)}{S(t)}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}(W(t+\Delta) - W(t)) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta, \sigma\sqrt{\Delta}\right). \quad (6.3)$$

$\theta_1 = (\mu - \sigma^2/2)\Delta$, $\theta_2 = \sigma^2\Delta$ において, θ_1, θ_2 を推定してから μ, σ を計算すればよい. θ_1, θ_2 の推定量はそれぞれ

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (\hat{\theta}_2)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta}_1)^2$$

となる. 実際 R でやってみると

```
> Y <- diff(log(X))
> theta1 <- mean(Y)
> theta2 <- sd(Y)
> sigma <- theta2/sqrt(1/250)
> sigma
[1] 0.224952
> mu <- theta1/(1/250) + sigma^2/2
> mu
[1] 0.0634854
```

より, $\mu = 0.0635$, $\sigma = 0.225$ が推定値となる. 変数 Y に $\log(S_{i+1}/S_i)$ の値を入れている.

例題 6.2 (Vasicek モデル (Ornstein-Uhlenbeck 過程)) OU 過程

$$dX(t) = (\theta_1 - \theta_2 X(t))dt + \theta_3 dW(t)$$

のパラメータ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の推定を考える. $X(s) = x$ という条件のもとでの $X(t+s)$ の条件付き分布は正規分布であり, その期待値 $m(t, x)$, 分散 $v(t, x)$ は

$$m(t, x) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t}, \quad v(t, x) = \frac{\theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2}$$

で与えられるので, 密度関数

$$f(\Delta, y|x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v(\Delta, x)}} \exp\left\{-\frac{(y - m(\Delta, x))^2}{2v(\Delta, x)}\right\}$$

を (6.2) に代入して対数尤度関数を作ればよい.

例題 6.3 (CIR モデル (平方根過程, Feller 過程)) 平方根過程

$$dX(t) = (\theta_1 - \theta_2 X(t))dt + \theta_3 \sqrt{X(t)} dW(t)$$

のパラメータ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の推定を考える. $X(s) = x$ という条件のもとでの $X(t+s)$ の条件付き分布は非心 χ^2 分布になる. その密度関数については適当な参考書を参照してほしい.

最尤法を使うにはパラメータを推定したい確率過程の条件付き密度関数が明示的に分かっている必要がある。密度関数が分からない場合にはどうするか。確率微分方程式を Euler-丸山近似すると

$$X(t + \Delta) - X(t) = b(X(t), \theta)\Delta + \sigma(X(t), \theta)(W(t + \Delta) - W(t))$$

となる。すなわち $X(t)$ の値で条件付けた $X(t + \Delta)$ の条件付き分布は正規分布

$$N(X(t) + b(X(t), \theta)\Delta, \sigma^2(X(t), \theta)\Delta)$$

にしたがうので、これを用いて最尤法を行う。Euler-丸山近似より効率の良い方法については Iacus の本を参照せよ。

6.2 期待リターンの推定

対数正規過程

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

のパラメータ推定についてもう一度考える。この節は R. C. Merton, “On estimating the expected return on the market; An exploratory investigation”, Journal of Financial Economics 8 (1980), 323-361 の記述を参考にしている。上でも述べたように $X(t + \Delta) = \log(S(t + \Delta)/S(t))$ は

$$\log\left(\frac{S(t + \Delta)}{S(t)}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}(W(t + \Delta) - W(t)) \quad (6.4)$$

より正規分布にしたがう。よって、 $S(t)$ の標本 S_0, S_1, \dots, S_n が得られているとき $X_i = \log(S_i/S_{i-1})$ とおけば

$$X_i = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.5)$$

となるから、標本 X_i をもとに μ, σ を推定する問題と考えればよい。ここで Z_i は互いに独立な正規分布にしたがう確率変数である。 $\mu - \sigma^2/2$ をあらためて μ と書いて、 n 個の標本 X_1, \dots, X_n から μ と σ を推定する問題を考える。 μ の推定量としては

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n X_i \quad (6.6)$$

を採用するのが自然だろう。ここで $h = n\Delta$ とおいており、 h は標本期間を表す。すると

$$E[\hat{\mu}] = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \mu, \quad \text{Var}[\hat{\mu}] = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{\sigma^2}{h}$$

となる。すなわち、 $\hat{\mu}$ の推定誤差は σ/\sqrt{h} である。つまり対数正規過程のドリフト項（期待リターン）の推定誤差は**標本期間 h の長さに依存し、標本の個数 n には依存しない**。言い換えると、ドリフト項の推定誤差を小さくするにはできるだけ長い期間の標本が必要となる。例題 6.1 ではおよそ $h = 4$, $\hat{\sigma} = 0.225$ であった。よって、 $\hat{\sigma}$ が真の分散に等しいとすれば推定誤差は $0.225/\sqrt{4} = 0.1125$ である。推定誤差を 1/10 にするには標本期間を 100 倍にすればよい。すなわち 400 年分のデータが必要なことになる。400 年もの間パラメータが一定とは考えにくいし、そもそも 400 年ものデータは存在しない。金融市場のデータから対数正規過程（ブラウン運動）のドリフトを推定することは非常に難しいことが分かる。これは対数正規過程（ブラウン運動）

に関する結果であるが、ジャンプ項がなくドリフトやボラティリティが急激な変化をすることのない確率過程であればほぼ同様の結果が言える。

一方でボラティリティ σ の推定についてはどのようなことが言えるか。 σ^2 の推定量として

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (6.7)$$

を採用する。不偏推定量である $1/h \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$ を採用すべきかと思うかもしれないが、 $\hat{\mu}$ の推定が難しいことを考えると (6.7) のほうがよいのである。また n が十分大きければ両者の差はなくなる。実際 (6.5) から $\hat{\sigma}$ はつぎの性質をもつことが分かる。

$$E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n X_i^2\right] = \mu^2 \Delta + \sigma^2 = \frac{\mu^2 h}{n} + \sigma^2,$$

$$\text{Var}[\hat{\sigma}^2] = \frac{4\mu^2 \sigma^2 h}{n} + \frac{2\sigma^2}{n}.$$

よって、 n が大きくなれば $E[\hat{\sigma}^2]$ は σ^2 に近づき、また $\hat{\sigma}^2$ の推定誤差も小さくなっていくことが分かる。よって、ボラティリティの推定誤差を小さくするには**標本の個数 n をなるべく大きく取ることが重要である**。最近ではティックデータ（取引がおこった時点のデータ）も簡単に手に入るようになり、ファイナンスの問題では n を大きく取ることには困難は少ない。よって、ボラティリティの推定は比較的容易にできるということを理解しておこう。ちなみに、ボラティリティの推定量 $\hat{\sigma}^2 = 1/h \sum_{i=1}^n X_i^2$ を**実現ボラティリティ**と呼ぶことがある。

6.3 インプライドボラティリティ

前節の議論から対数正規過程のドリフト項の推定は難しいことが分かった。ところがオプションの価格付けではリスク中立確率のもとでの対数正規過程、すなわち

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

を考えればよかった。 r は金利であり金融市場で容易に観測できる量である。よって、オプションの価格付けではドリフト項の推定は不要でボラティリティの推定だけが問題になる（原資産が対数正規過程にしたがうことを仮定できる場合）。よって、ボラティリティを前節までで紹介した方法により推定すればよいように思える。しかし、オプションの価格付けやヘッジの実務では過去データから推定したボラティリティは使わないようである。その代わりに**インプライドボラティリティ**と呼ばれるものが使われる。いま Black-Scholes のコールオプション価格公式を $f_{\text{BS}}(t, x, r, K, \sigma)$ とおく。 t は満期までの時間、 x は現在の資産価格、 r は金利、 K は権利行使価格である。すなわち

$$f_{\text{BS}}(t, x, r, K, \sigma) = xN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

である。いま、このオプションの市場価格が p であったとする。このとき σ の方程式

$$f_{\text{BS}}(t, x, r, K, \sigma) = p \quad (6.8)$$

の解をインプライドボラティリティとよぶ。 $p > f_{BS}(t, x, r, K, 0)$ であれば方程式 (6.8) に解があることは

$$\frac{\partial f_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{x e^{-d_1^2/2} \sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} > 0$$

から分かる。

例題 6.4 日経平均株価指数を原資産とする限月 2013 年 1 月、権利行使価格 10500 円のコールオプションの価格が 2012/12/28 時点で 115 円であった。このときのインプライドボラティリティを求める。残日数は 14 日 (14/365 年) でこの日の日経平均株価は 10395.18 円であった。金利は 0.0013 (TIBOR の 1 週間物) とする。R では方程式の解を `uniroot` で求めることができる。まず、つぎのような関数を用意する。

```
IV <- function(sigma, p, r, T, K, S0){

  #sigma: ボラティリティ
  #p: オプション市場価格
  #r: 利率
  #T: 満期までの時間
  #K: 行使価格
  #S0: 現在の株価

  dplus <- 1/(sigma*sqrt(T))*(log(S0/K)+(r+sigma^2/2)*T)
  dminus <- 1/(sigma*sqrt(T))*(log(S0/K)+(r-sigma^2/2)*T)
  price <- S0*pnorm(dplus) - K*exp(-r*T)*pnorm(dminus)

  return(price - p)
}
```

オプションの市場価格 p と理論価格の差を返す関数である。 `uniroot()` をつかってインプライドボラティリティを求めると

```
> uniroot(IV, c(0,1), p=115, r=0.001,T=14/365,K=10500,S0=10395.18)
$root
[1] 0.1983274

$f.root
[1] -0.0004788695

$iter
[1] 5

$estim.prec
[1] 6.103516e-05
```

よって、インプライドボラティリティは 0.198 であることが分かった。

さまざまな行使価格 K に対するインプライドボラティリティ σ を求めてそれをグラフにするとつぎのようになる (図 6.1)。この図のようにボラティリティカーブは凸なグラフになることが多い。「にやっ」と笑った口

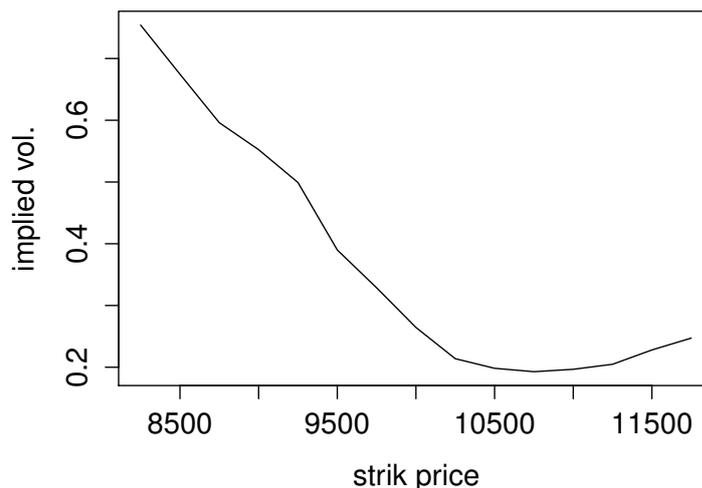


図 6.1 ボラティリティカーブ

元に似ている (?) のでこの現象をボラティリティスマイルと呼ぶことがある。また、満期までの時間によってもインプライドボラティリティは異なる。(権利行使価格, 満期までの時間, インプライドボラティリティ) をグラフにすると図 6.2 のようなグラフが描ける。Black-Scholes モデルでは権利行使価格 K や満期までの時間 T によってボラティリティ σ が変化することは説明できない。これは Black-Scholes モデルが正しくないことの証拠の一つである。では、どのようなモデルを仮定すれば図 6.1 や図 6.2 のようなインプライドボラティリティが得られるかという問題を考える必要が出てくる。

6.4 収益率の正規性

(6.3) より Black-Scholes モデルにおける原資産価格 $S(t)$ のリターン $\log(S(t+\Delta)/S(t))$ は正規分布にしたがう。では、実際の株価収益率は正規分布にしたがうのであろうか。日経平均株価収益率の正規性を調べてみる。図 6.3 は 2009 年 1 月 5 日から 2013 年 1 月 7 日の日経平均株価日次データを用いて作成した、収益率のヒストグラムである。ヒストグラムだけではよく分からないので、正規 Q-Q プロットを描いてみる (図 6.4)。R では `qqnorm()` で正規 Q-Q プロットが描ける。点が直線上に並んでいれば正規分布と言えるのだが、分布の裾の部分がやや怪しい。

また日経平均株価収益率の歪度 (skewness) は -0.558 、尖度 (kurtosis) は 7.66 である^{*42}。すなわち、日経平均株価収益率の分布は正規分布に比べると、歪度が負であることから左の裾が長く、尖度が 3 より大き

^{*42}期待値 μ 、分散 σ^2 をもつ確率変数 X に対して、歪度は $E[(X-\mu)^3]/\sigma^3$ 、尖度は $E[(X-\mu)^4]/\sigma^4$ によって定義される。正規分布の歪度は 0、尖度は 3 である。尖度を $E[(X-\mu)^4]/\sigma^4 - 3$ と定義する場合もある。

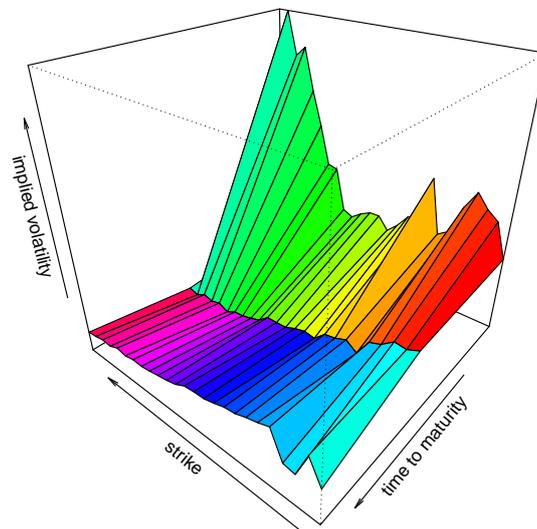


図 6.2 ボラティリティ曲面

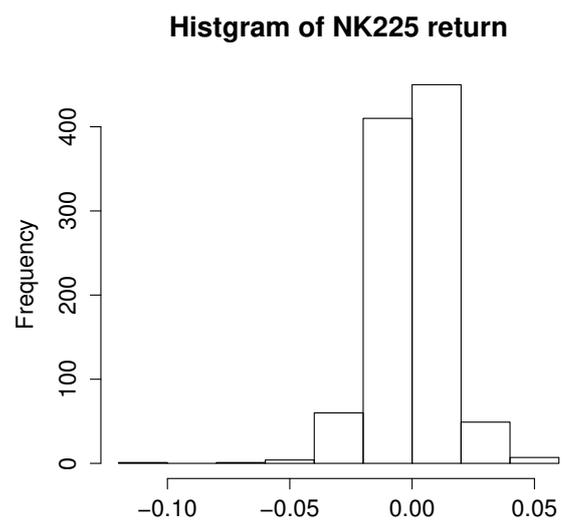


図 6.3 日経平均株価収益率（日次）のヒストグラム

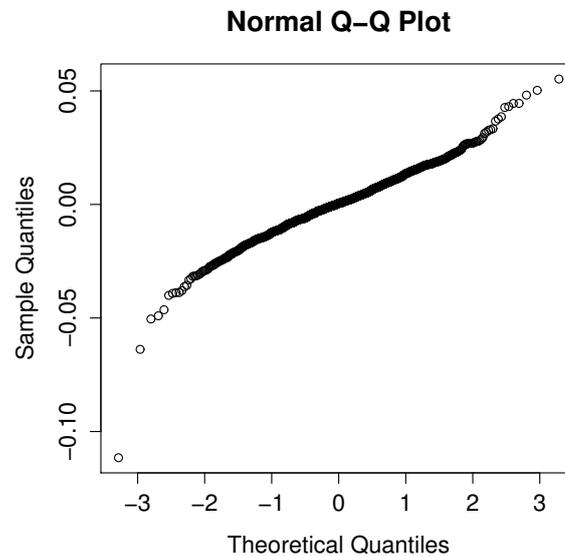


図 6.4 日経平均株価収益率（日次）の正規 Q-Q プロット

いことから裾が厚いことが分かる。正確に正規性を判定するには仮説検定を行う必要がある。Shapiro-Wilk (シャピロ-ウィルク) 検定を行なってみる。R では `shapiro.test()` で Shapiro-Wilk 検定ができる。

```
> shapiro.test(Y)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: Y
```

```
W = 0.9668, p-value = 3.477e-14
```

変数 `Y` は 142 ページにおいて作成したもので、日経平均株価収益率が入っている。Shapiro-Wilk 検定の帰無仮説は「データは正規分布にしたがう」である。p 値がほとんどゼロなので、帰無仮説は棄却される。よって、日経平均株価の収益率は正規分布にしたがわない。すなわち、少なくとも日経平均株価を Black-Scholes モデルによってモデル化するのはよくなさそうである。

7 さまざまなオプション価格付けモデル

原資産の収益率の非正規性やボラティリティスマイルを説明できるモデルを考えたい。代表的なモデルに、局所ボラティリティモデル、確率ボラティリティモデル、ジャンプモデルなどがある。

7.1 局所ボラティリティモデル

原資産価格 $S(t)$ がリスク中立確率のもとで

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(S(t), t)S(t)dW(t) \quad (7.1)$$

という確率微分方程式を満たすとする。ここで、 r は無リスク金利であり、 $\sigma(x, t)$ は確定的な資産価格と時間の 2 変数関数であり、局所ボラティリティ関数とよぶ。(7.1) を局所ボラティリティモデルとよぶ。Dupire (1994)^{*43} や Derman and Kani (1994)^{*44} は局所ボラティリティ関数 $\sigma(x, t)$ を図 6.2 のようなボラティリティ曲面と整合的になるように決める方法を提案した。具体的には原資産価格 S_0 、権利行使価格が K 、満期までの時間が T のコールオプション価格 $C(S_0, K, T)$ が任意の $S_0, K, T > 0$ について与えられているとする。このとき、関数 $C(S_0, K, T)$ から計算されるボラティリティ曲面と整合的な $\sigma(x, t)$ は

$$\sigma^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \quad (7.2)$$

によって与えられる。この式の導出はやや難しい。Dupire (1994) や『数理ファイナンス』（関根順、培風館）などを参照するとよい。このモデルが有効であるためには、多くの $S_0, K, T > 0$ について $C(S_0, K, T)$ が与えられている必要があることに注意する。エキゾティックなオプションの価格付けをするためには、市場で観測されるオプション価格から (7.2) によって $\sigma(x, t)$ を導出した後、(7.1) を用いてモンテカルロシミュレーション等を行えばよい。

7.2 確率ボラティリティモデル

資産価格 $S(t)$ が（実確率のもとで）つぎの確率微分方程式にしたがうとする。

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + a(Y(t))S(t)dW(t), & S(0) > 0, \\ dY(t) = p(Y(t))dt + q(Y(t))dZ(t), & Y(0) > 0, \\ W(t) = W_1(t), \\ Z(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2}W_2(t), & -1 \leq \rho \leq 1. \end{cases} \quad (7.3)$$

ここで、 (W_1, W_2) は 2 次元ブラウン運動、 a は非負関数である。 $p(Y(t)) \equiv 0$ 、 $q(Y(t)) \equiv 0$ のとき、すなわち $a(Y(t)) \equiv$ 定数のときは (7.3) は Black-Scholes モデルと一致する。

2 次元ブラウン運動 (W_1, W_2) から作られた $Z(t)$ は 1 次元ブラウン運動となる。また、定数 ρ はブラウン運動 W と Z の（増分の）瞬間的な相関を表す。実際、簡単な計算により

$$E[(W(t + \Delta t) - W(t))(Z(t + \Delta t) - Z(t))] = \rho \Delta t$$

^{*43}Dupire, B. (1994). Pricing with a Smile. Risk, 7, 18-20.

^{*44}Derman, E., & Kani, I. (1994). Riding on a smile. Risk, 7, 32-39

を示すことができる。

a, p, q の決め方にはいろいろあるが、代表的なものとして **Heston モデル**^{*45}

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{Y(t)}S(t)dW(t) \\ dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ(t) \end{cases} \quad (7.4)$$

がある。この Y がしたがう確率微分方程式は平方根過程 (Feller 過程, CIR 過程) と呼ばれるものであり、定数 κ, θ, σ に関する適当な条件のもとで非負であり、平均回帰性をもつという特徴がある。

では、価格過程が (7.3) にしたがう危険資産 1 つと

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad B(0) = 1, \quad r > 0$$

にしたがう安全資産があるとき、支払い $h(S(T))$ をもつ (ヨーロッパ) オプションの価格はどのように求められるだろうか。偏微分方程式アプローチで考えてみる。

7.2.1 Black-Scholes モデル (再訪)

まず Black-Scholes 式を導く方法を確認しておこう。モデルは

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ dB(t) = rB(t)dt, \quad B(0) = 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

である。危険資産を $\phi(t)$ 単位、安全資産を $\eta(t)$ 単位購入するポートフォリオの価値を $V(t)$ とすると、

$$V(t) = \phi(t)S(t) + \eta(t)B(t)$$

となる。資金自己調達の仮定のもとで $V(t)$ は

$$dV(t) = \phi(t)dS(t) + \eta(t)dB(t) = \phi(t)dS(t) + r\eta(t)B(t)dt \quad (7.6)$$

を満たす。

つぎに t 時点におけるオプションの価格を $f(t, S(t))$ とおくと伊藤の公式から

$$\begin{aligned} df(t, S(t)) &= f_t(t, S(t))dt + f_s(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f_{ss}(t, S(t))dS(t)^2 \\ &= \left[f_t(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) \right] dt + f_s(t, S(t))dS(t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

を満たす。

$V(t) = f(t, S(t)), \forall t \in [0, T]$ かつ $f(T, S(T)) = h(S(T))$ となる ϕ, η を見つければよいから、(7.6) と (7.7) を比べて

$$\begin{aligned} r\eta(t)B(t) &= f_t(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) \\ \phi(t) &= f_s(t, S(t)) \end{aligned}$$

^{*45}Heston, S. L., "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options." Review of Financial Studies 6, no. 2 (April 1, 1993): 327-343.

とする。 $f(t, S(t)) = \phi(t)S(t) + \eta(t)B(t)$ と合わせて解くと

$$\begin{aligned} f_t(t, S(t)) + rS(t)f_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)f_{ss}(t, S(t)) - rf(t, S(t)) &= 0 \\ \phi(t) &= f_s(t, S(t)) \\ \eta(t) &= \frac{f(t, S(t)) - f_s(t, S(t))S(t)}{B(t)} \end{aligned}$$

となる。よって、境界条件 $f(T, s) = h(s)$ のもとで偏微分方程式

$$f_t(t, s) + rsf_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 f_{ss}(t, s) - rf(t, s) = 0$$

を解けば価格とヘッジポートフォリオが求まることになる。

7.2.2 確率ボラティリティモデル (試行)

Black-Scholes 式の導出と同様にして確率ボラティリティモデル (7.3) に対する価格公式 (偏微分方程式) を導いてみる。

危険資産を $\phi(t)$ 単位、安全資産を $\eta(t)$ 単位購入するポートフォリオの価値を $V(t)$ とすると、

$$V(t) = \phi(t)S(t) + \eta(t)B(t)$$

となる。資金自己調達の仮定のもとで $V(t)$ は

$$dV(t) = \phi(t)dS(t) + \eta(t)dB(t) = \phi(t)dS(t) + r\eta(t)B(t)dt \quad (7.8)$$

を満たす。

つぎに t 時点におけるオプションの価格を $f(t, S(t), Y(t))$ とおくと伊藤の公式から (以下では煩雑になるので関数の独立変数を省略することがある、すなわち $f_s(t, S(t), Y(t))$ を f_s などと書くことがある。関数と定数を混同しないように。)

$$\begin{aligned} df &= f_t dt + f_s dS + f_y dY + \frac{1}{2}f_{ss}(dS)^2 + f_{sy}dS(t) \cdot dY + \frac{1}{2}f_{yy}(dY)^2 \\ &= \left[f_t + \frac{1}{2}a^2 S^2 f_{ss} + \rho a S q f_{sy} + \frac{1}{2}q^2 f_{yy} \right] dt + f_s dS + f_y dY \end{aligned} \quad (7.9)$$

を満たす。

$V(t) = f(t, S(t), Y(t)), \forall t \in [0, T]$ かつ $f(T, S(T), Y(T)) = h(S(T))$ となる ϕ, η を見つければよい。ところが (7.8) と (7.9) を比べると (7.8) には $dY(t)$ の項がないため $V(t) = f(t, S(t), Y(t)), \forall t \in [0, T]$ となる ϕ, η を決定することができない。これは危険資産 $S(t)$ と安全資産 $B(t)$ ではオプションの支払い $h(T, S(T), Y(T))$ の複製ができない、すなわちボラティリティのリスクがヘッジできないことを意味する。この状況を市場が**非完備**であるという。ボラティリティのリスクをヘッジするためには、 $Y(t)$ のリスクをもつ取引可能な資産をもう1つ導入しなくてはならない。たとえば、危険資産 S を原資産とする別のオプションが取引可能な状況を想定する。

7.2.3 確率ボラティリティモデル

危険資産 S に加えて S を原資産とするオプション S_1 が取引可能であり、その価格過程が $g(t, S(t), Y(t))$ となることを仮定する。すなわち S_1 は

$$\begin{aligned} dS_1 &= g_t dt + g_s dS + g_y dY + \frac{1}{2} g_{ss} (dS)^2 + g_{sy} dS \cdot dY + \frac{1}{2} g_{yy} (dY)^2 \\ &= \left[g_t + \frac{1}{2} a^2 S^2 g_{ss} + \rho a S q g_{sy} + \frac{1}{2} q^2 g_{yy} \right] dt + g_s dS + g_y dY \end{aligned}$$

にしたがう。

危険資産 S を $\phi(t)$ 単位、オプション S_1 を $\phi_1(t)$ 単位、安全資産を $\eta(t)$ 単位購入するポートフォリオの価値を $V(t)$ とすると、

$$V(t) = \phi(t)S(t) + \phi_1(t)S_1(t) + \eta(t)B(t)$$

となる。資金自己調達の仮定のもとで $V(t)$ は

$$\begin{aligned} dV &= \phi dS + \phi_1 dS_1 + \eta dB \\ &= \left[r\eta B + \phi_1 \left(g_t + \frac{1}{2} a^2 S^2 g_{ss} + \rho a S q g_{sy} + \frac{1}{2} q^2 g_{yy} \right) \right] dt + (\phi + \phi_1 g_s) dS + \phi_1 g_y dY \end{aligned} \quad (7.10)$$

を満たす。

つぎに t 時点におけるオプションの価格を $f(t, S(t), Y(t))$ とおくと伊藤の公式から

$$\begin{aligned} df &= f_t dt + f_s dS + f_y dY + \frac{1}{2} f_{ss} (dS)^2 + f_{sy} dS \cdot dY + \frac{1}{2} f_{yy} (dY)^2 \\ &= \left[f_t + \frac{1}{2} a^2 S^2 f_{ss} + \rho a S q f_{sy} + \frac{1}{2} q^2 f_{yy} \right] dt + f_s dS + f_y dY \end{aligned} \quad (7.11)$$

となる。 $V(t) = f(t, S(t), Y(t))$, $\forall t \in [0, T]$ かつ $f(T, S(T), Y(T)) = h(S(T))$ となる ϕ, η を見つければよいから、(7.10) と (7.11) を比べて

$$\begin{aligned} r\eta B + \phi_1 \left(g_t + \frac{1}{2} a^2 S^2 g_{ss} + \rho a S q g_{sy} + \frac{1}{2} q^2 g_{yy} \right) &= f_t + \frac{1}{2} a^2 S^2 f_{ss} + \rho a S q f_{sy} + \frac{1}{2} q^2 f_{yy} \\ \phi + \phi_1 g_s &= f_s \\ \phi_1 g_y &= f_y \end{aligned}$$

とする。 $f(t, S(t), Y(t)) = \phi(t)S(t) + \phi_1(t)S_1(t) + \eta(t)B(t)$, $g(t, S(t), Y(t)) = S_1(t)$ と合わせて解くと

$$\frac{f_t + rSf_s + \frac{1}{2} a^2 S^2 f_{ss} + \rho a S q f_{sy} + \frac{1}{2} q^2 f_{yy} - rf}{f_y} = \frac{g_t + rSg_s + \frac{1}{2} a^2 S^2 g_{ss} + \rho a S q g_{sy} + \frac{1}{2} q^2 g_{yy} - rg}{g_y} \quad (7.12)$$

$$\phi = f_s - \frac{g_s}{g_y} f_y \quad (7.13)$$

$$\phi_1 = \frac{f_y}{g_y}. \quad (7.14)$$

(7.12) に着目する。この等式は g がどんな満期、支払い関数をもつオプションの価格であっても成立する。よって、(7.12) の左辺は t, S, Y の関数であるはずである。この関数を $\eta(t, S, Y)$ とおけば、

$$f_t + rSf_s + \frac{1}{2} a^2 S^2 f_{ss} + \rho a S q f_{sy} + \frac{1}{2} q^2 f_{yy} - rf = \eta f_y$$

すなわち,

$$f_t + rSf_s + \frac{1}{2}a^2S^2f_{ss} + \rho aSqf_{sy} + \frac{1}{2}q^2f_{yy} - rf - \eta f_y = 0 \quad (7.15)$$

が成り立つ。もし、関数 η を特定することができれば

$$f_t(t, s, y) + rsf_s(t, s, y) + \frac{1}{2}a^2(y)s^2f_{ss}(t, s, y) + \rho asq(y)f_{sy}(t, s, y) + \frac{1}{2}q^2(y)f_{yy}(t, s, y) - rf(t, s, y) - \eta(t, s, y)f_y(t, s, y) = 0, \quad f(T, s, y) = h(s)$$

を解くことにより、オプションの価格を求めることができる。

関数 η のもつ意味を詳しく見てみる。いま問題となっているオプションを 1 単位と原資産 S を f_s 単位ショートしたポートフォリオ（すなわちオプションをデルタヘッジをしたポートフォリオ）の価値を V とすると

$$V = f - f_sS$$

となる。 V にはボラティリティの変動リスクは残ることに注意する。資金自己調達の仮定と (7.15) を用いると V がしたがう確率微分方程式は

$$\begin{aligned} dV &= df - f_s dS \\ &= f_t dt + f_s dS + f_y dY + \frac{1}{2}f_{ss}(dS)^2 + f_{sy}dS \cdot dY + \frac{1}{2}f_{yy}(dY)^2 - f_s dS \\ &= \left[f_t + \frac{1}{2}a^2S^2f_{ss} + \rho aSqf_{sy} + \frac{1}{2}q^2f_{yy} \right] dt + f_y dy \\ &= [rf + \eta f_y - rSf_s] dt + f_y(pdt + qdW_2) \\ &= [rV + (\eta + p)f_y]dt + qf_y dW_2 \end{aligned}$$

となる。

いま、一般に資産価格 X が

$$dX = \mu X dt + \sigma X dW(t)$$

という確率微分方程式にしたがうとする。 W はブラウン運動で μ と σ は確率変数でもよい。このとき

$$\frac{\mu - r}{\sigma}$$

を X の**リスクの市場価格**とよぶ。そうするとデルタヘッジした V のリスクの市場価格 $\theta(t, S, Y)$ は

$$\lambda = \frac{r + (\eta + p)f_y/V - r}{qf_y/V} = \frac{\eta + p}{q}$$

となる。すなわち η はボラティリティのリスクの市場価格を決定する関数だとみなすことができる。(7.12) を解く立場では、市場を完備化するために導入したオプションの価格 g が分かるということ、リスクの市場価格 λ が分かるということは同等である。よって、確率ボラティリティモデル (7.3) を解くためにはボラティリティ過程 Y のリスクの市場価格を知ることが必要となる。通常はリスクの市場価格 λ をパラメータ化し、取引されているオプションの価格からパラメータを逆算することになる。

7.2.4 Heston モデル

Heston モデル

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{Y(t)}S(t)dW_1(t) \\ dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}d(\rho W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}W_2(t)), Y(0) = y_0 \end{cases} \quad (7.16)$$

を見てみよう。これは (7.3) において

$$a(y) = \sqrt{y}, \quad p(y) = \kappa(\theta - y), \quad q(y) = \sigma\sqrt{y}$$

としたものである。 κ, θ, σ は定数である。Heston (1993) は

$$\eta(t, s, y) = -p(y) + \lambda y = -\kappa(\theta - y) + \lambda y \quad (7.17)$$

において、解の公式を導出した。ここで λ は定数である。このとき (7.15) は

$$f_t + rsf_s + \frac{1}{2}ys^2f_{ss} + \rho\sigma ysf_{sy} + \frac{1}{2}\sigma^2yf_{yy} - rf + \{\kappa(\theta - y) - \lambda y\}f_y = 0 \quad (7.18)$$

となる。コールオプション $f(T, s, v) = (s - K)^+$ を考えたとき (7.18) の閉じた解 (解の公式) $V(S, Y, t, T)$ を得ることができる。

$$V(S, Y, t, T) = SP_1(x, Y, t, T, K) - Ke^{-r(T-t)}P_2(x, Y, t, T, K), \quad (7.19)$$

$$x = \ln(S) \quad (7.20)$$

$$P_j(x, Y, t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, Y, t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi \quad (7.21)$$

$$f_j(x, Y, t, T, \phi) = \exp \{ C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi)Y + i\phi x \} \quad (7.22)$$

$$C(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right\} \quad (7.23)$$

$$D(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right) \quad (7.24)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j} \quad (7.25)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \quad (7.26)$$

$$j = 1, 2 \quad (7.27)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda \quad (7.28)$$

R のコードにすると以下のとおり (あまり精密でない)。

```
r, S0, K, kai, theta, sigma, Y0, rho, t, T, lambda は適当に設定
tau <- T - t
a <- kai * theta
u <- function(j){
  if (j == 1) return(0.5) else return(-0.5)
```

```

}
b <- function(j){
  if (j == 1) return(kai + lambda - rho * sigma) else return(kai + lambda)
}
d <- function(j,phi){
  return(sqrt((rho * sigma * phi * 1i - b(j))^2 - sigma^2 * (2 * u(j) * phi * 1i - phi^2)))
}
g <- function(j,phi){
  return((b(j) - rho * sigma * phi * 1i + d(j,phi))/(b(j) - rho * sigma * phi * 1i - d(j,phi)))
}
C <- function(j, tau, phi){
  tmp1 <- r * phi * tau * 1i
  tmp2 <- a / sigma^2
  tmp3 <- (b(j) - rho * sigma * phi * 1i + d(j,phi)) * tau
  tmp4 <- 2 * log((1 - g(j,phi) * exp(d(j,phi) * tau))/(1 - g(j, phi)))
  return(tmp1 + tmp2 * (tmp3 - tmp4))
}
D <- function(j, tau, phi){
  tmp1 <- (b(j) - rho * sigma * phi * 1i + d(j, phi)) / sigma^2
  tmp2 <- (1 - exp(d(j,phi) * tau)) / (1 - g(j,phi) * exp(d(j,phi) * tau))
  return(tmp1 * tmp2)
}
varphi <- function(j, phi){
  return(exp(C(j, tau, phi) + D(j, tau, phi) * Y0 + phi * x * 1i))
}
inP <- function(phi,j){
  tmp <- exp(-1i * phi * log(K)) * varphi(j,phi) / (phi * 1i)
  return(Re(tmp))
}
P <- function(j){
  return(0.5 + 1 / pi * integrate(inP, 0, 10^3, j)$value)
}
S0 * P(1) - K * exp(-r * tau) * P(2)

```

(7.21) 中にある広義積分の評価が問題となる。上記のコードでは `integrate` という関数を使っているが、あまり精密でない。また、積分区間を $[0, \infty]$ とするとエラーがでるので、 $[0, 10^3]$ を積分区間としている。実際にはもっとよい方法を使う。

さて、コールオプションやプットオプションに対する解の公式と市場で取引されているオプションの価格から、パラメータ $\kappa, \theta, \sigma, \rho, \lambda, y_0$ を逆算することができる。いま、オプションの価格を $P(K, T; C)$ とする。

K は行使価格, T は満期までの時間, C はモデルのパラメータの集合を表す, すなわち $C = \{\kappa, \theta, \sigma, \rho, \lambda\}$. 観測したオプション価格を $P^{\text{obs}}(K, T)$ とする. このとき最適化問題

$$\min_C \sum_{K, T} (P(K, T; C) - P^{\text{obs}}(K, T))^2$$

を解いてパラメータ C を求める. $\sum_{K, T}$ は観測できる K, T すべてについて和をとることを意味する. このようにして求めたパラメータ $\kappa, \theta, \sigma, \rho, \lambda, y_0$ を (7.16) に戻して, (リスク中立確率のもとでの確率微分方程式に変換した後) モンテカルロシミュレーションなどによりエキゾチックなオプションの価格を求めることができる.

8 確率微分方程式の近似

(リスク中立確率のもとでの) Heston モデル

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{Y(t)}S(t)dW(t), & S(0) = s_0 \\ dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ(t), & Y(0) = y_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

のパラメータ $\kappa, \theta, \sigma, \rho, y_0$ が前章の方法により求めたと仮定する. そこでつぎに価格過程が (8.1) にしたがう資産に対する, 経路依存オプション (バリアオプションやアジアンオプションなど) をモンテカルロシミュレーションによって価格付けすることを考えたい. そのためには, 価格過程の経路

$$S(0), S(\Delta t), S(2\Delta t), \dots$$

をシミュレーションする必要がある. $S(t)$ が Black-Scholes モデルにしたがうときは

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma(W(t + \Delta t) - W(t)) \right\}$$

より, $S(t)$ が与えられたもとでの $S(t + \Delta t)$ の分布が対数正規であるので, (対数) 正規乱数を用いて $\{S(t)\}$ の経路を生成することができた. じつは Heston モデルについては $S(t)$ が与えられたもとでの $S(t + \Delta t)$ の分布は知られているが^{*46}, その分布が分からない場合は原資産価格過程がしたがう確率微分方程式を離散近似する必要が生じる.

確率微分方程式

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), X(0) = x_0 \quad (8.2)$$

の解 $X(t)$ の (条件付き) 分布が正確にわからないとき, $\{X(t)\}$ の経路を近似する方法を考える.

8.1 収束の次数

いくつかの離散近似の方法を比較するために, 収束の速さを定義しておく. $\{X(t, \omega)\}$ を確率微分方程式 (8.2) の標本路 (パス) とし, $\{\hat{X}^h(t, \omega)\}$ をその (離散) 近似とする. $\hat{X}^h(t)$ は $t = h, 2h, 3h, \dots$ でしか定義されないが, それ以外の t に関しては $(n-1)h < t < nh$ となる n に対して, たとえば $\hat{X}^h(t) := \hat{X}^h(nh)$ と定義しておけばよい. このとき $X(T, \omega)$ と $\hat{X}^h(T, \omega)$ の誤差を

$$\left| \hat{X}^h(T, \omega) - X(T, \omega) \right|$$

で測る^{*47}. 別の標本路が実現すれば異なる誤差 $|\hat{X}^h(T, \omega') - X(T, \omega')|$ が生じる. このとき, すべての標本路に関して誤差の平均をとる:

$$\epsilon(h) = E \left[\left| \hat{X}^h(T) - X(T) \right| \right].$$

^{*46}たとえば, つぎの本を参照せよ.

- 『数理ファイナンス』, 関根順, 培風館
- 『The Volatility Surface』, J. Gatheral, Wiley
- 『Option Valuation under Stochastic Volatility』, A. L. Lewis, Finance Press

^{*47} X が 1 次元のときは $|\cdot|$ は絶対値を表し, 2 次元以上の場合には適当なノルムを表すものとする.

$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ となるとき, $\hat{X}^h(T)$ は $X(T)$ に**強収束**するという. また, ある定数 $c > 0, \beta > 0$ に対して

$$\epsilon(h) = E \left[\left| \hat{X}^h(T) - X(T) \right| \right] \leq ch^\beta$$

となるならば, $\hat{X}^h(T)$ は $X(T)$ へ次数 β で強収束するという. β が大きいほど収束が速いことになる.

強収束は確率変数 \hat{X} の確率変数 X への収束性を見ているが, ファイナンスの問題では $E[\hat{X}^h(T)]$ が $E[X(T)]$ に近づきさえすればよいことが多い. 強収束よりも弱い収束の概念で十分になる. ある定数 $c > 0, \beta > 0$ と (適当な条件を満たす) 任意の f について

$$\left| E[f(\hat{X}^h(T))] - E[f(X(T))] \right| \leq ch^\beta \quad (8.3)$$

が成り立つとき, $\hat{X}^h(T)$ は $X(T)$ へ次数 β で**弱収束**するという^{*48}. Euler-丸山近似は適当な条件のもとで弱収束の次数が 1 であることが知られている. 一般に

$$|E(X) - E(Y)| \leq E(|X - Y|)$$

が成り立つことから, 強収束をすれば弱収束もすることが分かる.

8.2 Euler-丸山近似

もっとも単純でよく用いられる方法はつぎの **Euler-丸山近似**である. 確率微分方程式 (8.2) を積分形で書くと

$$X(t+h) = X(t) + \int_t^{t+h} a(X(u))du + \int_t^{t+h} b(X(u))dW(u). \quad (8.4)$$

Euler-丸山近似とは $u \in [t, t+h]$ において,

$$a(X(u)) \approx a(X(t)), \quad b(X(u)) \approx b(X(t))$$

と近似する方法である. すなわち, Euler-丸山近似とは (8.2) の解 X をつぎの方法で近似するものである.

$$\hat{X}(t+h) = \hat{X}(t) + a(\hat{X}(t))h + b(\hat{X}(t))(W(t+h) - W(t)) \quad (8.5)$$

$t_i = ih$ と書けば, つぎが Euler-丸山近似となる.

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + a(\hat{X}(t_i))h + b(\hat{X}(t_i))\sqrt{h}Z_{i+1}, \quad \hat{X}(0) = X(0), \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

ここで, Z_1, Z_2, \dots は互いに独立な標準正規分布にしたがう確率変数である. 時間の刻み幅 h を明示したいときは \hat{X} を \hat{X}^h と書く. Euler-丸山近似は適当な条件のもとで強収束のオーダーが $1/2$, 弱収束のオーダーは 1 であることが知られている. 詳しくは Kloeden and Platen の本を参照せよ.

例題 8.1 確率微分方程式

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

を Euler-丸山近似により離散化すると

$$\hat{S}(t_{i+1}) = \hat{S}(t_i) + \hat{S}(t_i)rh + \hat{S}(t_i)\sigma\sqrt{h}Z_i$$

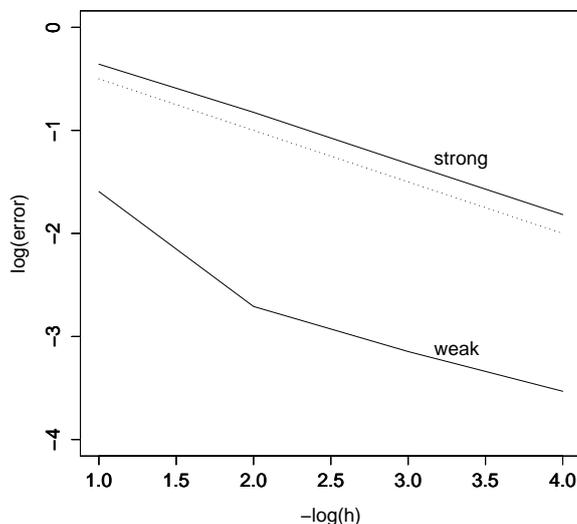


図 8.1 誤差 (error) が小さくなる様子. 強収束 (strong) と弱収束 (weak). 点線は傾きが $-1/2$ の直線

となる. $\hat{S}(t_m)$ と $S(T)$ の誤差を調べたのが図 8.1 である. モンテカルロシミュレーションにより $N = 5000$ 本のパスを発生させ, 強収束と弱収束の誤差

$$E \left[\left| \hat{S}(t_m) - S(T) \right| \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{S}^i(t_m) - S^i(T)|$$

と

$$E \left[\hat{S}(t_m) \right] - E \left[S(T) \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{S}^i(t_m) - S^i(T))$$

を計算した.

例題 8.2 Feller 過程 (CIR 過程)

$$dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta\sqrt{Y(t)}dW(t) \quad (8.7)$$

に素直に Euler-丸山近似を適用すると,

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t_{i+1}) &= \hat{Y}(t_i) + \alpha(m - \hat{Y}(t_i))\Delta t + \beta\sqrt{\hat{Y}(t_i)}(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \hat{Y}(t_i) + \alpha(m - \hat{Y}(t_i))h + \beta\sqrt{\hat{Y}(t_i)}\sqrt{h}Z_{i+1} \end{aligned} \quad (8.8)$$

となる. $2\alpha m \geq \beta^2$ が満たされるときは確率微分方程式 (8.7) の解 $Y(t)$ は正であることが知られている. ところが, Euler-丸山近似 (8.8) により生成される $\hat{Y}(t_i)$ は負になる可能性がある. このとき $\sqrt{\hat{Y}(t_i)}$ が定義できない. よって, 通常は (8.8) 右辺の $\sqrt{Y(t_i)}$ の代わりに $\sqrt{\max\{0, Y_i(t)\}}$ または $\sqrt{|Y(t_i)|}$ を使う.

*48ただし, 原資産の経路に依存する支払いをもつオプション, たとえば $1/T \int_0^T S(u)du$ や $\max_{0 < t < T} S(t)$ をもとにしたオプションの場合は, (8.3) で収束の速さを測ることは必ずしもできないので注意が必要. Glasserman の第 6 章を参照するとよい.

ただし, Feller 過程 (8.8) については, $Y(t)$ が与えられたもとの $Y(t + \Delta t)$ ($\Delta t > 0$) の条件付き密度関数が明示的に知られているので, 離散近似を避けることができる. 結果だけ書くと

$$Y(t + \Delta t) = \frac{\beta^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})}{4\alpha} \chi_d^2 \left(\frac{4\alpha e^{-\alpha\Delta t}}{\beta^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})} Y(t) \right) \quad (8.9)$$

となる. ここで, $d = 4m\alpha/\beta^2$ で $\chi_d^2(\lambda)$ は自由度 d で非心パラメータ λ の非心 χ^2 分布にしたがう確率変数. 詳しくは Glaserman の第 3 章 4 節を参照せよ. R では `rchisq` という関数で非心 χ^2 分布にしたがう乱数を発生させることができる.

例題 8.3 (Heston モデル)

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{Y(t)}S(t)dW(t) \\ dY(t) &= \kappa(\theta - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ(t) \\ W &= W_1, Z = \rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2}W_2, (W_1, W_2) \text{ は 2次元ブラウン運動} \end{aligned} \quad (8.10)$$

の Euler-丸山近似は

$$\begin{aligned} \hat{S}(t_{i+1}) &= \hat{S}(t_i) + r\hat{S}(t_i)h + \sqrt{|\hat{Y}(t_i)|}\hat{S}(t_i)\sqrt{h}W_{1,i+1} \\ \hat{Y}(t_{i+1}) &= \hat{Y}(t_i) + \kappa(\theta - \hat{Y}(t_i))h + \beta\sqrt{|\hat{Y}(t_i)|}\sqrt{h}(\rho W_{1,i+1} + \sqrt{1 - \rho^2}W_{2,i+1}) \end{aligned}$$

となる. ここで $W_{1,i+1}, W_{2,i+1}$ は独立な 2 次元正規分布にしたがう確率変数.

バリアオプションの Heston モデルによる価格付けのコード.

```
HestonBarrier <- function(r, kappa, theta, sigma, rho, S0, Y0, K, T, B){
  # B:バリアの水準
  N <- 250      # [0,T] 区間の分割数
  Delta <- T/N  # 1 区間の長さ
  Npath <- 10000 # 生成するパスの数
  value <- numeric(Npath)

  for (j in 1:Npath){
    S <- numeric(N)
    Y <- numeric(N)
    S[1] <- S0
    Y[1] <- Y0
    for (i in 1:(N-1)) {
      rnd <- rnorm(2)
      S[i+1] <- S[i] + S[i]*r*Delta + S[i]*sqrt(abs(Y[i])) * sqrt(Delta) * rnd[1]
      Y[i+1] <- Y[i] + kappa * (theta - Y[i]) * Delta
      + sigma * sqrt(abs(Y[i])) * sqrt(Delta)* (rho * rnd[1] + sqrt(1 - rho^2) * rnd[2])
    }
    Smax <- max(S)
    value[j] <- exp(-r*T)*max(S[i+1] - K, 0) * (Smax < B)
  }
}
```

```

}
return(mean(value))
}

```

8.3 Milstein 近似

Euler-丸山近似の式 (8.6) をみるとドリフト項は $O(h)$ の次数で、拡散項 ($dW(t)$ の項) は $O(\sqrt{h})$ の次数でゼロに近づくことが分かる。拡散項の次数を $O(h)$ にできないだろうか。

1 次元の場合だけを考える。確率微分方程式 (8.2) を積分形で書くと

$$X(t+h) = X(t) + \int_t^{t+h} a(X(u))du + \int_t^{t+h} b(X(u))dW(u). \quad (8.11)$$

Euler-丸山近似とは $u \in [t, t+h]$ において、

$$a(X(u)) \approx a(X(t)), \quad b(X(u)) \approx b(X(t))$$

と近似する方法であった。ここで拡散項の係数 $b(X(t))$ に伊藤の公式を適用する。

$$\begin{aligned} db(X(t)) &= b'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}b''(X(t))(dX(t))^2 \\ &= b'(X(t))[a(X(t))dt + b(X(t))dW(t)] + \frac{1}{2}b''(X(t))b^2(X(t))dt \\ &= \left[b'(X(t))a(X(t)) + \frac{1}{2}b''(X(t))b^2(X(t)) \right] dt + b'(X(t))b(X(t))dW(t). \end{aligned}$$

この確率微分方程式に Euler-丸山近似を適用すると、 $u \in [t, t+h]$ のとき

$$b(X(u)) = b(X(t)) + \left[b'(X(t))a(X(t)) + \frac{1}{2}b''(X(t))b^2(X(t)) \right] (u-t) + b'(X(t))b(X(t))(W(u) - W(t))$$

となる。ここで $O(u-t)$ の次数であるドリフト項を無視して

$$b(X(u)) \approx b(X(t)) + b'(X(t))b(X(t))(W(u) - W(t))$$

と考える。これを (8.4) の右辺第 3 項に代入して

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} b(X(u))dW(u) &\approx \int_t^{t+h} [b(X(t)) + b'(X(t))b(X(t))(W(u) - W(t))] dW(u) \\ &= b(X(t))[W(t+h) - W(t)] + b'(X(t))b(X(t)) \left(\int_t^{t+h} (W(u) - W(t))dW(u) \right). \end{aligned}$$

よって、Milstein 近似は Euler-丸山近似に

$$b'(X(t))b(X(t)) \left(\int_t^{t+h} (W(u) - W(t))dW(u) \right) \quad (8.12)$$

を加えたものになる。(8.12) の積分をもう少し計算してみる。

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} (W(u) - W(t))dW(u) &= \int_t^{t+h} W(u)dW(t) - W(t) \int_t^{t+h} dW(u) \\ &= Y(t+h) - Y(t) - W(t)(W(t+h) - W(t)). \end{aligned}$$

ここで $Y(t) = \int_0^t W(u)dW(t)$ である. 伊藤の公式より

$$d(W^2(t)) = 2W(t)dW(t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (dW(t))^2 = 2W(t)dW(t) + dt.$$

よって,

$$dY(t) = W(t)dW(t) = \frac{1}{2}d(W^2(t)) - \frac{1}{2}dt$$

だから

$$Y(t) = Y(0) + \frac{1}{2} \int_0^t d(W^2(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t dt = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t$$

となる. よって

$$\int_t^{t+h} (W(u) - W(t))dW(u) = \frac{1}{2} [W(t+h) - W(t)]^2 - \frac{1}{2}h. \quad (8.13)$$

まとめると

$$\int_t^{t+h} b(X(u))dW(u) \approx b(X(t))[W(t+h) - W(t)] + \frac{1}{2}b'(X(t))b(X(t)) \{ [W(t+h) - W(t)]^2 - h \}$$

となる. よって

$$X(t+h) \approx X(t) + a(X(t))h + b(X(t))[W(t+h) - W(t)] + \frac{1}{2}b'(X(t))b(X(t)) \{ [W(t+h) - W(t)]^2 - h \}$$

すなわち

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + a(\hat{X}(t_i))h + b(\hat{X}(t_i))\sqrt{h}Z_{i+1} + \frac{1}{2}b'(\hat{X}(t_i))b(\hat{X}(t_i))h(Z_{i+1}^2 - 1) \quad (8.14)$$

が近似式となる. ここで, Z_1, Z_2, \dots は互いに独立な標準正規分布にしたがう確率変数である. (8.14) を Milstein 近似とよぶ. Milstein 近似は次数 1 の弱収束を実現する. しかし弱収束の次数は Euler-丸山近似と同じ 1 である. よって弱収束だけを考える場合には Euler-丸山近似で十分ということになる. 弱収束の次数を上げるにはどうしたらよいだろうか.

8.4 2 次の方法

8.4.1 1 次元の場合

次数 2 の弱収束を実現するアルゴリズムを紹介する. Milstein 近似では拡散項の係数 $b(X(t))$ を展開したが, さらにドリフト項 $a(X(t))$ の展開を考えると次数 2 が実現できる. 一般に伊藤の公式より

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))(dX(t))^2 \\ &= \left[a(X(t))f'(X(t)) + \frac{1}{2}b^2(X(t))f''(X(t)) \right] dt + b(X(t))f'(X(t))dW(t) \end{aligned} \quad (8.15)$$

である. 微分作用素 L^0, L^1 をつぎのように定義する.

$$L^0 = a \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}b^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad L^1 = b \frac{d}{dx}.$$

(8.15) を積分形で書くと

$$f(X(t)) = f(X(t_0)) + \int_{t_0}^t L^0 f(X(t)) dt + \int_{t_0}^t L^1 f(X(t)) dW(t)$$

となる. $a(X(u))$ に伊藤の公式を適用すると

$$a(X(u)) = a(X(t)) + \int_t^u L^0 a(X(s)) ds + \int_t^u L^1 a(X(s)) dW(s)$$

となる. この式に Euler-丸山近似を適用する, すなわち $L^i a(X(s)) \approx L^i a(X(t))$ ($i = 0, 1$) として

$$a(X(u)) = a(X(t)) + L^0 a(X(t)) \int_t^u ds + L^1 a(X(t)) \int_t^u dW(s)$$

とする. よって,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} a(X(u)) du &= a(X(t))h + L^0 a(X(t)) \int_t^{t+h} \int_t^u ds du + L^1 a(X(t)) \int_t^{t+h} \int_t^u dW(s) du \\ &=: a(X(t))h + L^0 a(X(t)) I_{(0,0)} + L^1 a(X(t)) I_{(1,0)} \end{aligned} \quad (8.16)$$

$b(X(u))$ についても同様にすると

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+h} b(X(u)) dW(u) \\ &= b(X(t)) [W(t+h) - W(t)] + L^0 b(X(t)) \int_t^{t+h} \int_t^u ds dW(u) \\ &\quad + L^1 b(X(t)) \int_t^{t+h} \int_t^u dW(s) dW(u) \\ &=: b(X(t)) [W(t+h) - W(t)] + L^0 b(X(t)) I_{(0,1)} + L^1 b(X(t)) I_{(1,1)} \end{aligned} \quad (8.17)$$

が得られる. (8.16), (8.17) を (8.4) に代入して

$$X(t+h) = X(t) + ah + b\Delta W + \left(aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) I_{(0,0)} + \left(ab' + \frac{1}{2} b^2 b'' \right) I_{(0,1)} + ba' I_{(1,0)} + bb' I_{(1,1)} \quad (8.18)$$

となる. ここで, $\Delta W = W(t+h) - W(t)$ で, 関数 a, b とその微分は $X(t)$ で評価される^{*49}. $I_{(0,0)}$ の評価は

$$I_{(0,0)} = \int_t^{t+h} \int_t^u ds du = \frac{1}{2} h^2$$

となる. 伊藤の公式で $d(W^2(t))$ を計算してみると, $I_{(1,1)}$ の評価は

$$I_{(1,1)} = \int_t^{t+h} \int_t^u dW(s) dW(u) = \int_t^{t+h} (W(u) - W(t)) dW(u) = \frac{1}{2} ((\Delta W)^2 - h)$$

^{*49}ちなみに Milstein 近似は

$$X(t+h) = X(t) + ah + bb' I_{(1,1)}$$

である.

となることが分かる. $I_{(0,1)}$ の評価はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} I_{(0,1)} &= \int_t^{t+h} \int_t^u ds dW(u) \\ &= \int_t^{t+h} (u-t) dW(u) \\ &= hW(t+h) - \int_t^{t+h} W(u) du \quad (\text{伊藤の公式で } d(tW(t)) \text{ を計算してみる.}) \\ &= h(W(t+h) - W(t)) - \int_t^{t+h} (W(u) - W(t)) du \\ &= h\Delta W - I_{(1,0)}. \end{aligned}$$

$I_{(1,0)}$ の評価はつぎのようになる. $\Delta I = I_{(1,0)} = \int_t^{t+h} (W(u) - W(t)) du$ とおく. $(\Delta W, \Delta I)$ は 2 次元正規分布にしたがう,

$$E[\Delta W] = E[\Delta I] = 0, \quad E[(\Delta I)^2] = \frac{1}{3}h^3, \quad E[\Delta W \Delta I] = \frac{1}{2}h^2$$

である. よって,

$$\begin{pmatrix} \Delta W \\ \Delta I \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} h & \frac{1}{2}h^2 \\ \frac{1}{2}h^2 & \frac{1}{3}h^3 \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Σ をコレスキー分解すると $\Sigma = AA^\top$ で

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{h} & 0 \\ \frac{1}{2}h^{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}h^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

となる. よって, (Z_1, Z_2) を独立な標準正規分布にしたがう確率変数とすると $(\Delta W, \Delta I)^\top = A(Z_1, Z_2)^\top$ だから

$$\Delta W = \sqrt{h}Z_1, \quad \Delta I = \frac{1}{2}h^{\frac{3}{2}} \left(Z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}Z_2 \right)$$

となる. 以上より,

$$\begin{aligned} X(t+h) &= X(t) + ah + b\Delta W + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b'' \right) (\Delta Wh - \Delta I) + a'b\Delta I \\ &\quad + \frac{1}{2}bb'((\Delta W)^2 - h) + \frac{1}{2} \left(aa' + \frac{1}{2}b^2a'' \right) h^2 \end{aligned} \quad (8.20)$$

が得られた. この近似法の弱収束の次数は 2 であることが知られている.

例題 8.4 幾何ブラウン運動

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

を (8.20) によって近似する. $a(x) = rx, b(x) = \sigma x$ とすればよいから,

$$\begin{aligned} \hat{S}(t_{i+1}) &= \hat{S}(t_i) + r\hat{S}(t_i)h + \sigma\hat{S}(t_i)\Delta W + r\sigma\hat{S}(t_i)(\Delta Wh - \Delta I) + r\sigma\hat{S}(t_i)\Delta I \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2\hat{S}(t_i)((\Delta W)^2 - h) + \frac{1}{2}r^2\hat{S}(t_i)h^2 \\ &= \hat{S}(t_i) \left[1 + rh + \sigma\Delta W + r\sigma(\Delta Wh - \Delta I) + r\sigma\Delta I + \frac{1}{2}\sigma^2((\Delta W)^2 - h) + \frac{1}{2}r^2h^2 \right] \end{aligned} \quad (8.21)$$

$E[\hat{S}(t_{i_m})]$ と $E[S(T)]$ の誤差を調べたものが図 8.2 である.

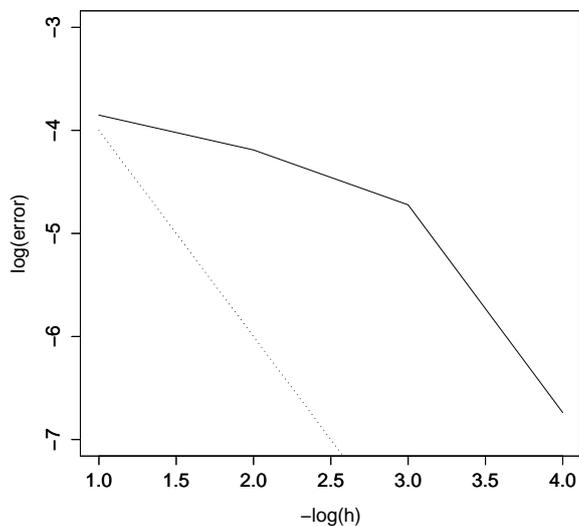


図 8.2 誤差 (error) が小さくなる様子. 実線は 2 次の方法による弱収束の誤差. 点線は傾きが -2 の直線

8.4.2 多次元の場合

d 次元の確率過程 $X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))$ が確率微分方程式

$$dX_k(t) = a_k(X(t))dt + \sum_{l=1}^m b_{kl}(X(t))dW_l(t), \quad k = 1, \dots, d \quad (8.22)$$

を満たす. ここで, (W_1, \dots, W_m) は m 次元ブラウン運動であり, $a_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $b_{kl}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, d$, $l = 1, \dots, m$) である.

このとき 2 次の方法による近似はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \hat{X}_k(t_{i+1}) &= \hat{X}_k(t_i) + a_k(\hat{X}(t_i))h + \sum_{l=1}^m b_{kl}(\hat{X}(t_i))\Delta W_l \\ &\quad + \frac{1}{2}L^0 a_k(\hat{X}(t_i))h^2 + \sum_{l=1}^m L^l a_k(\hat{X}(t_i))I_{(l,0)} \\ &\quad + \sum_{l=1}^m \left(L^0 b_{kl}(\hat{X}(t_i))I_{(0,l)} + \sum_{j=1}^m L^j b_{kl}(\hat{X}(t_i))I_{(j,l)} \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

ここで

$$\begin{aligned}\Delta W_l &= W_l(t+h) - W_l(t), \\ L^0 &= \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^m b_{ik} b_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad L^k = \sum_{i=1}^d b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ I_{(l,0)} &= \int_t^{t+h} \int_t^u dW_l(s) du, \quad I_{(0,l)} = \int_t^{t+h} \int_t^u ds dW_l(u), \quad I_{(j,l)} = \int_t^{t+h} \int_t^u dW_j(s) dW_l(u), \\ & j, k = 1, \dots, m\end{aligned}$$

である。ただし、多重積分 $I_{(j,l)}$ の計算が難しい。弱収束の場合はつぎの単純な方法が使える。

$$\begin{aligned}\hat{X}_k(t_{i+1}) &= \hat{X}_k(t_i) + a_k h + \sum_{l=1}^m b_{kl} \Delta W_l + \frac{1}{2} L^0 a_k h^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (L^l a_k + L^0 b_{kl}) \Delta W_l h + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m L^j b_{kl} (\Delta W_j \Delta W_l - V_{jl}), \quad k = 1, \dots, d\end{aligned}\tag{8.24}$$

ここで、 V_{jl} は h か $-h$ の値をとる独立な確率変数で

$$\begin{aligned}P(V_{jl} = h) &= P(V_{jl} = -h) = \frac{1}{2}, \quad l = 1, \dots, j-1, \\ V_{jj} &= -h, \\ V_{jl} &= -V_{lj}, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = j+1, \dots, m\end{aligned}$$

を満たす。

これを Heston モデル (8.10) に適用するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\hat{S}(t_{i+1}) &= \hat{S}(t_i) + r \hat{S}(t_i) h + \sqrt{\hat{Y}(t_i)} \hat{S}(t_i) \Delta W_1 \\ &+ \frac{1}{2} r^2 \hat{S}(t_i) h^2 + \left(\left[r + \frac{\sigma \rho - \kappa}{4} \right] \hat{S}(t_i) \sqrt{\hat{Y}(t_i)} + \left[\frac{\kappa \theta}{4} - \frac{\sigma^2}{16} \right] \frac{\hat{S}(t_i)}{\sqrt{\hat{Y}(t_i)}} \right) \Delta W_1 h \\ &+ \frac{1}{2} \hat{S}(t_i) \left(\hat{Y}(t_i) + \frac{\sigma \rho}{2} \right) (\Delta W_1^2 - h) + \frac{1}{4} \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \hat{S}(t_i) (\Delta W_2 \Delta W_1 + \xi), \\ \hat{Y}(t_{i+1}) &= \hat{Y}(t_i) + \kappa (\theta - \hat{Y}(t_i)) h + \sigma \sqrt{\hat{Y}(t_i)} (\rho \Delta W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_2) \\ &- \frac{1}{2} \kappa^2 (\theta - \hat{Y}(t_i)) h^2 + \left(\left[\frac{\kappa \theta}{4} - \frac{\sigma^2}{16} \right] \frac{1}{\sqrt{\hat{Y}(t_i)}} - \frac{3\kappa}{2} \sqrt{\hat{Y}(t_i)} \right) \sigma (\rho \Delta W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_2) h \\ &+ \frac{1}{4} \sigma^2 \rho^2 (\Delta W_1^2 - h) + \frac{1}{4} \sigma^2 (1 - \rho^2) (\Delta W_2^2 - h) + \frac{1}{2} \sigma^2 \rho \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_1 \Delta W_2.\end{aligned}$$

ここで、 ξ は h と $-h$ をそれぞれ $1/2$ の確率でとる確率変数である。

ちなみに、 $Y(t)$ は (8.9) を使えば離散近似をすることなくシミュレーションをすることができる。 $S(t)$ の近似が問題となる。 $S(t)$ が

$$S(t) = S(u) \exp \left\{ \int_u^t \left(r - \frac{1}{2} Y(s) \right) ds + \int_u^t \sqrt{Y(s)} dW_1(s) \right\}$$

と書けることを利用して、Heston モデルを (ほぼ) 離散近似することなくシミュレーションする方法がある。

- Broadie, M., and Kaya, O. (2006). Exact Simulation of Stochastic Volatility and Other Affine Jump Diffusion Processes. *Operations Research*, 54(2), 217 – 231.
- Smith, R. (2007). An almost exact simulation method for the Heston model. *Journal of Computational Finance*, 11(1), 115 – 125.
- Glasserman, P., and Kim, K.-K. (2009). Gamma expansion of the Heston stochastic volatility model. *Finance and Stochastics*, 15(2), 267 – 296.

などを参照せよ.

8.5 外挿法

Euler-丸山近似によれば

$$|E[\hat{X}^h(T)] - E[X(T)]| \leq ch \quad (8.25)$$

であった. ここで (8.25) が

$$E[\hat{X}^h(T)] = E[X(T)] + ch + o(h) \quad (8.26)$$

と書けるとしよう^{*50}. このとき

$$E[\hat{X}^{2h}(T)] = E[X(T)] + 2ch + o(h) \quad (8.27)$$

となる. よって, (8.26), (8.27) により

$$2E[\hat{X}^h(T)] - E[\hat{X}^{2h}(T)] = E[X(T)] + o(h).$$

よって, $2E[\hat{X}^h(T)] - E[\hat{X}^{2h}(T)]$ を計算することにより弱収束の次数が 1 より大きくなることが期待できる.

^{*50} $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^k} = 0$ のとき, $f(h) = o(h^k)$ と書く. $f(h)$ は h^k よりも速くゼロに近づくことを意味する.